

# LE APPLICAZIONI GEODETICHE DEL RADAR

GIOVANNI BOAGA

Il prof. C. A. Hart dell'Università di Londra in occasione dell'ottava Assemblea generale della Unione geodetica e geofisica internazionale tenutasi nello scorso agosto ad Oslo, presentò un interessante Rapporto sulle applicazioni geodetiche della radiotelegrafia con riguardo specialmente a quelle di tipo Radar.

Il comandante E. Bergstrand in tale occasione ha pure riferito sulle misure di distanze con procedimenti di alta frequenza eseguite in Danimarca ed il prof. Th. Verstelle del Reale ufficio idrografico olandese riferì sul principio del Decca.

Recentemente il prof. Hart ha pubblicato un interessante studio, sempre su questi argomenti, sul «Bulletin Géodésique» (n. 10, 1948).

Questi nuovi procedimenti sono destinati a portare grandi contributi alle misurazioni geodetiche, le quali abbandoneranno quasi completamente le misure angolari ed incrementeranno sempre più quelle di lunghe distanze. Si è all'inizio perciò di un notevole movimento che investe gran parte, non solo della geodesia operativa, ma altresì della geodesia teorica per quanto concerne le teorie della misura e delle compensazioni, le quali ultime dovranno poggiarsi non tanto — come è stato fatto finora — sulla *triangolazione* (misure di una o più basi e di angoli), ma bensì sulla *trilaterazione* (misure di sole distanze lineari). Sotto questo punto di vista gli argomenti di cui si è fatto

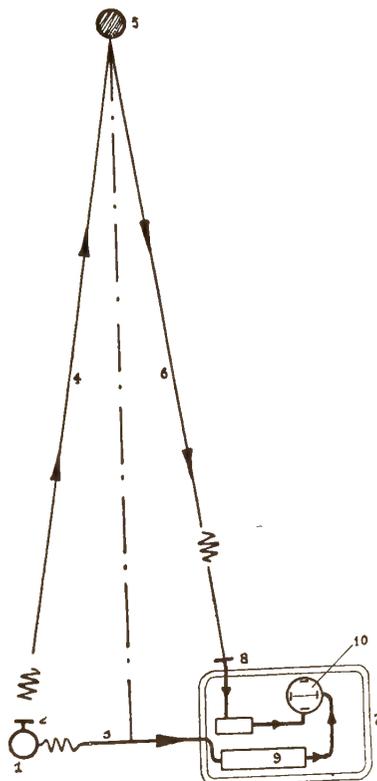


Fig. 1 - Schema del funzionamento del radio-localizzatore



cenno acquistano grande importanza specialmente per i collegamenti di isole ai continenti e di continenti fra loro, potendosi ora misurare in una sola volta centinaia di chilometri. Per questo motivo riteniamo utile dapprima illustrare brevemente i principî sui quali si basano i vari procedimenti di misurazione delle distanze con mezzi elettrici, poi mettere in rilievo i risultati di alcuni lavori sperimentali eseguiti durante la guerra ed infine accennare al problema fondamentale della compensazione della trilaterazione, con l'apporto pure di qualche contributo originale.

I. — Il principio sul quale si appoggiano questi procedimenti è quello della eco (riflessione) delle radioonde, quando vengono lanciate contro ostacoli. Le prime applicazioni si ebbero nel campo meteorologico: numerosi furono gli sperimentatori che utilizzarono questi metodi per le misure delle altezze di differenti strati di aria ionizzati.

La parola Radar è formata con la prima sillaba della prima parola della seguente frase inglese « Radio Detecting and Ranging », seguita dalle iniziali delle altre tre parole.

Il *radio-localizzatore* (Radar) è costituito (vedi lo schema nella fig. 1) da un *trasmettitore* (1) atto ad emettere una grandissima potenza, per una frazione dell'ordine di milionesimi di secondo. La trasmissione avviene ad impulsi della durata di circa 40 milionesimi di secondo ed è intercalata da una pausa — periodo di silenzio — relativamente lunga. La trasmissione ad impulsi permette di assegnare all'impianto piccole dimensioni in modo che esso può essere facilmente **autotrasportato**.

Oltre al trasmettitore si ha: un *modulatore*, capace di regolare le trasmissioni; una *antenna a riflettore orientabile* (2) che irradia gli impulsi nella direzione voluta sul piano orizzontale condotto per il punto stazione, in modo da raggiungere l'ostacolo (5), mediante la traiettoria (4). La riflessione porta l'onda lungo la traiettoria (6) ad un *ricevitore* (8) e ad un *tubo a raggi catodici* (10), su cui si fanno le letture e sul quale arriva oltre l'onda riflessa anche quella originaria, obbligata a passare per l'itinerario (3), (9), (vedi fig. 1).

Per comprendere il funzionamento di questo tubo, denominato il P.P.I. cioè *indicatore del piano di posizione*, si consideri una valvola elettronica (diodo) il cui filamento emetta degli elettroni che vengono



attratti da una placca (1) avente nel centro un piccolissimo foro (vedi fig. 2).

Parte degli elettroni attratti dalla placca (1) passano attraverso il foro formando un pennello elettronico che va ad incidere su uno schermo di vetro opalescente (3), che diventa fluorescente nel punto dove viene colpito dagli elettroni.

Per ingrandire le immagini lo schermo è sistemato ad una certa distanza dalla placca. Collocando fra lo schermo e la placca due placchette  $x_1$  ed  $x_2$  del tipo di quelle usate nei condensatori in modo che il fascio elettronico passi nello spazio compreso dalle

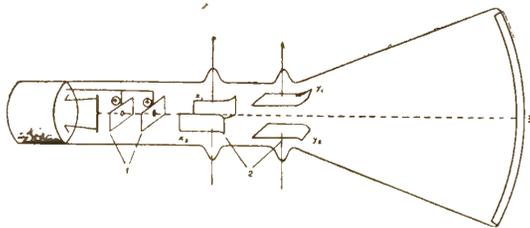


Fig. 2 - Schema del tubo a raggi catodici

due placche, sullo schermo fluorescente si forma un punto luminoso ove incide il raggio elettronico e se si dà a queste placchette una carica alternativamente negativa e positiva, il fascio elettronico subisce una deviazione ed il punto luminoso si sposta in alto ed in basso designando una striscia. Collocando altre due placchette  $y_1$  ed  $y_2$  (vedi fig. 2) in direzioni normali alle prime, il punto luminoso si sposterà in senso orizzontale. Combinando opportunamente le correnti delle due serie di placchette (2) il punto luminoso descrive un cerchio, sul quale è possibile misurare i tempi. Da un semplice calcolo risulta che se il punto luminoso compie il giro in un milionesimo di secondo, si può arrivare a determinare l'approssimazione che si può ottenere nelle misure di distanze.

Allorché il trasmettitore lancia un primo impulso il ricevitore segna sul tubo a raggi catodici (10) un primo lampo (itinerario 1, 3, 9 della fig. 1) che indica con la sua posizione l'origine della misura dei tempi. L'impulso viaggia nello spazio lungo il tragitto 4, 5, 6 ed arriva al ricevitore (8). Questo impulso che viene ora ricevuto, dopo la riflessione (impulso di ritorno) risulta ovviamente più debole di quello di partenza, specialmente per l'assorbimento che avviene nel punto di incidenza sulla superficie dell'ostacolo.

La distanza fra i due lampi — di partenza e di arrivo — misurata sul cerchio anzidetto (fig. 3-a) o su un oscillografo rettilineo (fig. 3-b), dà la possibilità di determinare il tempo impiegato dall'impulso a fare il doppio tragitto fra la stazione trasmittente e l'ostacolo,



visibile dalla stazione, e conseguentemente, poiché la velocità delle radioonde nell'aria coincide a tutti gli effetti pratici con quella della luce nel vuoto, si può ricavare la distanza fra la stazione e l'ostacolo e ciò con una approssimazione che dipende unicamente dalla precisione della misura del tempo. Poiché

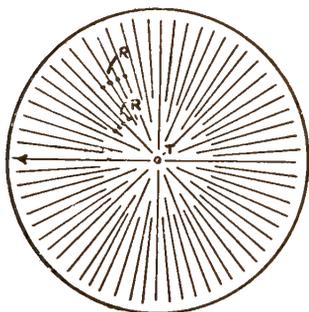


Fig. 3 a - P.P.I.; T = impulso di trasmissione (itinerario 1, 3, 10 della fig. 1); R = impulso di riflessione (1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, della fig. 1)

la velocità delle radioonde è dell'ordine di 300 m in un milionesimo di secondo, gli intervalli di tempo che si devono misurare sono molto piccoli, anche per lunghe distanze, ma la tecnica elettronica odierna possiede dei mezzi tali, da poter comodamente effettuare tali misure, risultando essi praticamente privi di inerzia; si può arrivare a computare senza difficoltà tempuscoli dell'ordine del centomillesimo del secondo ( $1 \times 10^{-8}$  sec).

Da quanto precede risulta chiaro che le radioonde emesse dal trasmettitore del Radar debbono essere ad altissima frequenza per dar modo all'antenna di concentrarle in un fascio assai stretto (cfr. G. Simeon, « Progressi nei metodi della navigazione » in *Annali dell'Ist. Univ. Navale*, 1947).

Il complesso strumentale descritto può denominarsi anche *radioecometro* o meglio *radio-telemetro*.

La portata pratica del radiotelemetro è influenzata però da diver-

si fattori di carattere fisico, quali: quota di installazione, caratteristiche elettriche del mezzo interposto, dimensioni e natura dell'ostacolo, orientamento delle antenne, potenza e sensibilità dell'apparato, interferenza di onde riflesse dalla ionosfera, rifrazione dell'aria. Se S è la sezione di un ostacolo installato entro il raggio dell'orizzonte visibile dalla stazione, P la potenza del Radar, d la durata dell'impulso, G il guadagno dell'antenna, K' e K'' due coefficienti atti a tenere conto delle caratteristiche del complesso strumentale, quali attitudine del-

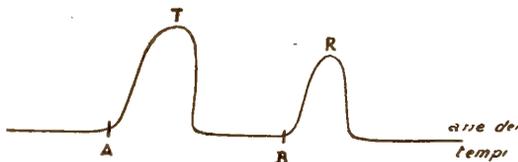


Fig. 3 b - T = impulso di trasmissione; R = impulso di riflessione; B-A = intervallo di tempo durante il quale l'impulso ha compiuto il viaggio di andata e ritorno dalla stazione al segnale



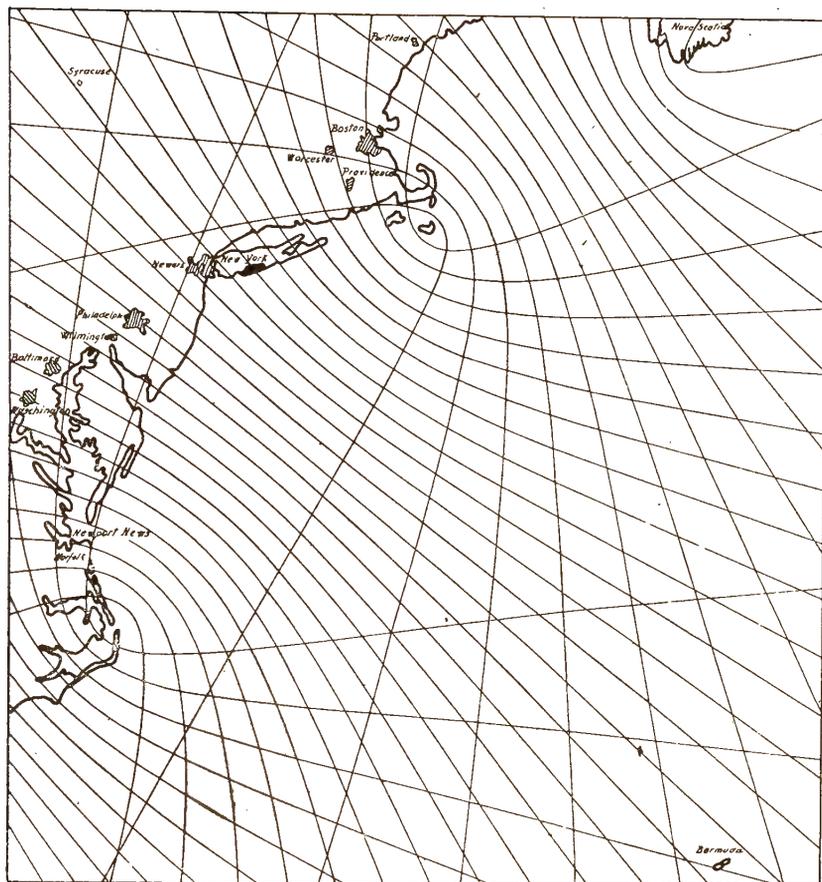


Fig. 4 - Famiglie di iperboli generate da una doppia base di Loran (figura rilevata dalla Nota del prof. Lombardini)

l'ostacolo alla riflessione e sensibilità del ricevitore, la distanza massima ( $D_{\max}$ ) che può essere rilevata, è fornita dalla seguente formula:

$$D_{\max} = \sqrt[4]{\frac{K'}{K''} \cdot P \cdot G^2 \cdot S \cdot d}$$

(cfr. P. Lombardini, « Prospettive di una radiotopografia », Rivista *L'Universo*, 1948).

L'esperienza ha dimostrato poi che per ostacoli alti al suolo possono servire onde relativamente lunghe, per ostacoli bassi (sul suolo) onde più brevi.



Mediante trasmissioni di impulsi brevi (p. es. di  $15 \times 10^{-8}$  sec) si ottengono nelle distanze precisioni di circa 10 m.

Nelle operazioni di guerra vennero usati altri procedimenti quali: il *Radar a risposta* (Beacon), dispositivo che permette di effettuare misure di distanze anche senza la presenza di ostacoli riflettenti; il *Loran*, che consiste in un trasmettitore ad impulsi piazzato in un punto *A*, di un dispositivo di risposta collocato in un secondo punto *B* e di un ricevitore Radar, il quale è installato in un terzo punto *X* di posizione incognita. Sull'oscillografo del ricevitore appariranno gli impulsi di *A* e di *B*; il loro reciproco ritardo *t* è fornito dalla:

$$t = \frac{\overline{AB} + \overline{BX}}{c} - \frac{\overline{AX}}{c} = \frac{\overline{BX} - \overline{AX}}{c} + \frac{\overline{AB}}{c}$$

con *c* velocità delle onde ed  $\overline{AB}$  distanza (nota) fra le due stazioni *A*, *B*. Rimane così determinato *t* dalla differenza  $\overline{BX} - \overline{AX}$  la quale, come è noto, definisce nel piano un luogo geometrico (iperbole) che è facilmente trasferibile sulla sfera o meglio sull'ellissoide terrestre.

Disponendo di una coppia di basi si ha la possibilità di individuare il punto *X* come intersezione di due iperboli appartenenti alle famiglie suddette (vedi fig. 4 e fig. 5).

Il metodo *Loran*, il cui nome proviene da « Long Rang Navigation » e che negli ambienti inglesi è conosciuto col nome di *Gee*, quando agisce con onde corte, permette di estendere l'impiego del Radar a distanze di molte centinaia di chilometri. Secondo J. A. Pierce (An introduction to Loran; 1946) le distanze con questo procedimento si possono ottenere con errori medi di  $\pm 3$  m.

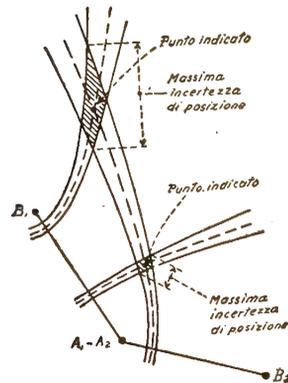


Fig. 5 - Zona di errore nella determinazione col metodo iperbolico (figura rilevata dalla Nota del prof. Lombardini)

Sono stati escogitati anche *telemetri ad interferenza*, ma oggi giorno presentano ancora difficoltà tecniche, per cui non è possibile attualmente fare delle applicazioni propriamente geodetiche.

Una applicazione notevole del metodo delle interferenze è data dal sistema *Decca*, duale del sistema *Loran*, dianzi ricordato. Anche col *Decca* si richiede una coppia di trasmettitori irradianti onde di lunghezze che stanno in rapporti semplici ed installati in due punti *A*, *B*



di posizione nota. La stazione ricevente è collocata nel punto  $X$  di posizione incognita. Qui si captano contemporaneamente le emissioni di  $A$  e quelle di  $B$ ; dopo aver ridotto le due onde alla stessa frequenza si confrontano le fasi con un fasometro. Le determinazioni così si riferiscono ad una differenza di distanze; anche qui dunque si definisce un luogo iperbolico (vedi fig. 6). La portata del Decca è dell'ordine di 800 km se le operazioni vengono effettuate di giorno e di 1500 km se effettuate di notte.

Un ulteriore *telemetro* è basato sulla *variazione di frequenza*; esso si fonda sulla possibilità di confronto della frequenza di due radioonde provenienti contemporaneamente da un ricevitore ed è particolarmente utile per brevi distanze (fino a 10 km), che vengono fornite con precisioni inferiori al metro.

2. — Osservazioni eseguite a Lovö (Danimarca) con telemetri di questo tipo, su lunghezze di 8 ed 11 km, hanno dato ottimi risultati (E. Bergstrand, Relazione alla Assemblea della U.G.G.I., Oslo 1948).

Distanze dell'ordine di 600 km col Radar sono state misurate in Italia nel 1945 da operatori inglesi, ottenendo pure buoni risultati.

Altre esperienze sono state condotte quasi sempre per operazioni di guerra, negli Stati Uniti d'America, specialmente per opera del Brigadiere H. Hotine — Direttore del Military Survey — ed in altri Paesi.

Altre applicazioni sono state fatte nel campo idrografico ed in quello fotogrammetrico, principalmente con lo scopo di determinare la quota di volo dell'aereo (Radaraltimetria).

Altri sistemi sono quelli che vanno sotto i nomi: *Oboe* e *Shoran*. Questi sistemi, a quanto ci consta, non sono stati ancora impiegati per operazioni geodetiche. Attualmente si stanno effettuando esperienze soprattutto per la determinazione della precisione del metodo, analizzando le varie cause di errori.

Si osserva poi che le distanze misurate col Radar sono distanze rettilinee e che perciò debbono essere ridotte al geoide (superficie curva) sul quale del resto si devono riportare tutte le misure (angoli, distanze, superficie) che devono essere utilizzate ai fini della Geodesia. Per questa riduzione si deve tener conto ovviamente e della altezza sul geoide della stazione trasmittente e della altezza sul geoide dell'ostacolo (segnale riflettente).



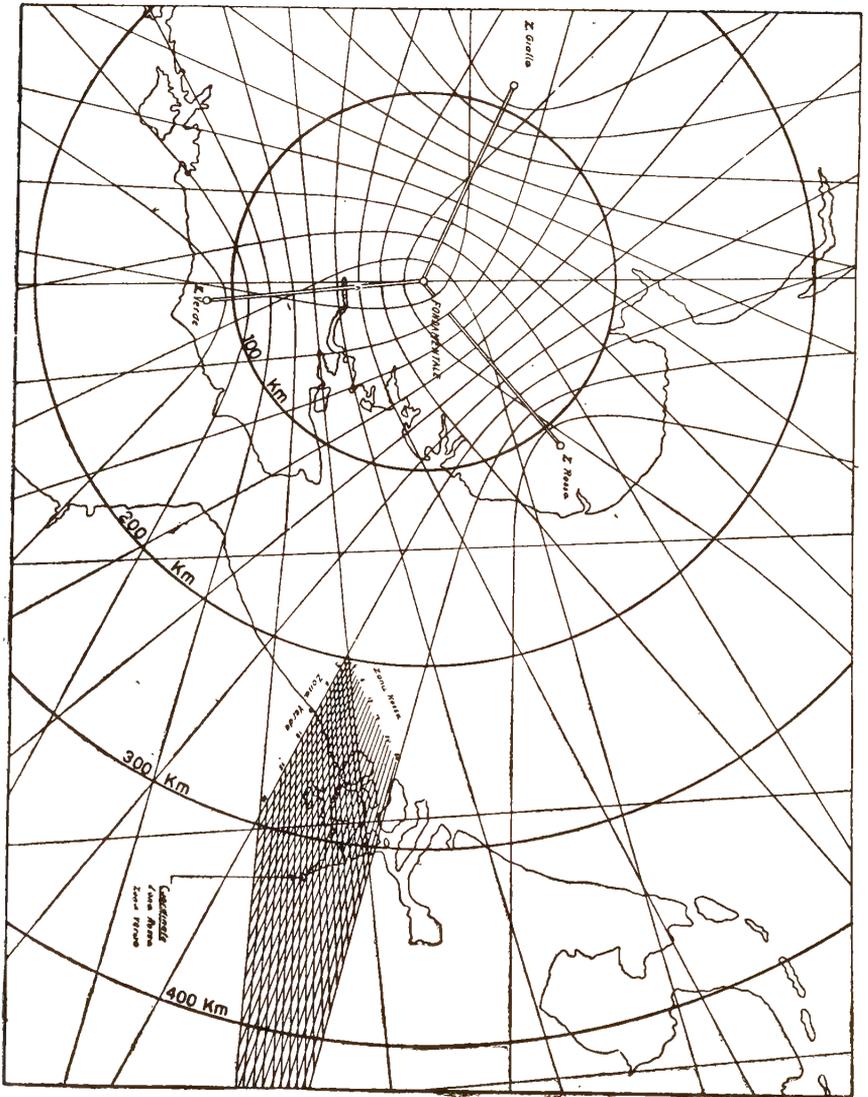


Fig. 6 - Famiglie di iperboli generate da tre basi Decca (schiave). La stazione centrale (fondamentale) trasmette con lunghezza d'onda  $\lambda$ , le schiave con lunghezza

$$\text{d'onda } \frac{m}{n} \lambda.$$



La velocità  $c$  delle onde elettromagnetiche nello spazio è legata all'indice di rifrazione atmosferico  $\mu$  ed alla velocità  $V$  di propagazione della luce, dalla relazione:

$$c = \mu \cdot V$$

L'indice  $\mu$ , che è variabile con le condizioni atmosferiche, si può ricavare dalla seguente formula di Englund-Crawford-Mumford:

$$(\mu - 1) \times 10^4 = \frac{P}{2T} \left\{ 2,11 + \frac{100 w}{P} \left( \frac{101,59}{T} - 0,00293 \right) \right\}$$

in funzione dei dati meteorologici:  $T$  temperatura assoluta (centigrada),  $P$  pressione atmosferica espressa in millimetri di mercurio,  $w$  la variazione di pressione dovuta alla presenza del vapor d'acqua e pure espressa in millimetri di mercurio.

L'indice  $\mu$  è variabile anche con l'altezza per modo che si ha:

$$\mu_h = \mu_0 (1 - h \cdot K)$$

con evidente significato degli indici apposti a  $\mu$ ; il fattore  $K$  vale approssimativamente  $1/4R$  con  $R$  raggio medio della Terra ed  $h$  altezza della stazione.

Secondo accurate misurazioni compiute da Smith, Franklin, Whiting nel 1947 nelle Isole inglesi, a varie altezze, la velocità  $V$  varia nel seguente modo:

altezza	0	piedi	$V = 299\ 680$	km/sec
»	10 000	»	299 710	»
»	20 000	»	299 725	»
»	30 000	»	299 740	»

Valori poco diversi da questi sono stati trovati da altri Autori (Jones, Conford, anno 1948) in altre regioni.

In particolare poi nel 1935 Michelson-Pearce-Pearson hanno ottenuto il valore  $(299\ 774 \pm 11)$  km/sec (cfr. « Velocity of Light in a Partial Vacuum », Astr. Journ. Vol. 82); Anderson nel 1941 con metodi radioelettrici ed ottici è pervenuto al valore  $(299\ 716 \pm 14)$  km/sec (cfr. « Final Measurement of the Velocity of Light », Journ. po. Opt. Soc. Am.); Essen nel 1947 (cfr. « Nature », Vol. 195) con metodi esclusivamente elettrici ha trovato un valore un po' maggiore dei precedenti  $(299\ 793 \pm 9)$  km/sec; Warner per la velocità delle onde elettromagnetiche, mediante operazioni eseguite nel 1941 in Australia, è arrivato a stabilire il valore  $299\ 776$  km/sec (cfr. « The velocity of Electromagnetic Waves », Austr. Journal of Science, Vol. X, 1947).



Dalla relazione sopra scritta fra  $c$  e  $V$ , tenendo conto della variabilità di  $\mu$ , si conclude che la velocità delle onde elettromagnetiche è variabile col mutare delle condizioni atmosferiche; inoltre quando le traiettorie passano in vicinanza del suolo, la velocità delle onde viene perturbata, ed anche di questa eventualità è necessario tenere conto nelle applicazioni geodetiche.

3. — Da quanto detto risulta evidente che, compiuti ulteriori studi per mettere in luce le entità degli inevitabili errori che questi nuovi metodi comportano, si passerà su larga scala alla esecuzione dei grandi collegamenti geodetici in modo da unire le triangolazioni esistenti sulle isole a grandi distanze dai continenti, con quelle stabilite sui continenti stessi. Le misure lineari che si otterranno dovranno allora essere assoggettate a compensazione, come del resto lo sono le attuali che comprendono angoli e distanze.

Se una figura è composta di  $N$  vertici, per determinare le loro mutue posizioni sono necessarie come è noto  $2 \cdot N - 3$  misure; ogni misura angolare o lineare che si esegue in più dà luogo ad una equazione di condizione che deve sussistere fra gli elementi osservati. Così se si misurano  $B$  lati (basi) ed  $A$  angoli e se è  $B + A > 2 \cdot N - 3$ , il numero  $E_c$  delle equazioni di condizione è dato dalla:

$$E_c = B + A - 2 \cdot N + 3$$

e se non si misurano angoli, purché sia  $B > 2 \cdot N - 3$ ,

$$E_c = B - 2 \cdot N + 3.$$

Da ciò discende che misurando di un quadrilatero ( $N=4$ ) i quattro lati e le due diagonali ( $B=6$ ) si ha  $E_c=1$  e quindi, in questo caso, deve sussistere una relazione fra le lunghezze dei lati e quelle delle diagonali.

Generalizzando la questione si trovano risultati interessanti considerando p. es. un pentagono ( $N=5$ ) e misurando i lati e le diagonali ( $B=10$ ); si trova allora  $E_c=3$  e quindi fra le lunghezze dei lati e quelle delle diagonali di un pentagono debbono sussistere tre relazioni fra loro indipendenti.

Se si misurano, sempre nel caso del pentagono, solo 9 elementi lineari, risulta  $E_c=2$  e se si misurano 8 elementi,  $E_c=1$ .

E' facile poi provare che per un poligono di  $N$  vertici, con  $N > 3$ , misurando tutti i lati e tutte le diagonali, il numero di equazioni di



condizioni che devono intercorrere fra i lati e le diagonali, è espresso dalla:

$$E_c = \frac{1}{2} (N-2) (N-3).$$

Nei Trattati di Geometria vengono messe in rilievo le relazioni intercedenti fra i lati e le diagonali dei trapezi, fra i lati opposti per i quadrilateri circoscritti ad una circonferenza, fra i lati e le diagonali per i quadrilateri inscritti (Teoremi di Tolomeo e di Legendre), ma nessun accenno viene fatto sulla relazione esistente fra le lunghezze dei lati e delle diagonali per un quadrilatero qualunque o più in generale fra gli elementi, pure lineari — lati e diagonali — di un poligono irregolare qualsiasi. Però geometri sommi si sono occupati di ricercare le relazioni predette ed i risultati conseguiti sono stati denominati « risultati curiosi ». Basta a tale scopo rammentare l'opera di Pappo Alessandrino (« Mathematicae collectiones ») e quelle di Giulio Carlo Fagnano (« Opere matematiche », 1743), qualche lavoro di Charles (« Geom. Sup. », Cap. XVI), di Eulero (« Comm. Arithm. collectae », 1849), ecc.

Mentre per le *triangolazioni* nelle equazioni laterali ed alle basi predomina il « Teorema dei seni », per le *trilaterazioni* nelle formule che si utilizzano per stabilire le equazioni di condizione — unicamente fra misure di lunghezze — predomina il « Teorema del coseno »; per questa ragione le relazioni che ne risultano prendono il nome di « identità di Carnot ».

Recentemente E. Warchalowski (Warsavia, 1948) in una Nota dal titolo « Triangulation d'un type nouveau » si occupa del problema della compensazione della trilaterazione, ma molto prima (1935) lo scrivente in una Nota inserita nella Rivista del Catasto e dei SS.TT.EE. dal titolo « Schemi di compensazioni di rilievi topografici eseguiti con sole misure lineari » e poi riportata nel proprio « Trattato di Geodesia e Topografia » (Padova, Cedam, 1948) si è occupato del medesimo argomento. Su ciò in precedenza era stata scritta una interessante Memoria dal dott. Krüger dell'Istituto Geodetico di Potsdam, dal titolo « Bedingungengleichungen für Liniernetze und für Rückwartseinchnitte ». In tutti questi lavori assegnate le misure delle lunghezze dei lati e delle corde uscenti da un punto centrale e dirette ai vertici del poligono, si fa ricorso alle formule di Briggs per il calcolo degli angoli interni a ciascun triangolo onde verificare se sono soddisfatte le condizioni che rappresentano i legami geometrici delle figure. In particolare la



somma degli angoli attorno al giro di orizzonte del punto centrale deve risultare di quattro angoli retti; se ciò non accade si correggono le lunghezze delle misure provenienti dalle osservazioni ricorrendo alle relazioni che derivano da quelle esprimenti il Teorema di Carnot, dopo di averle differenziate, considerando variabili tutti i parametri in esse contenuti (vedi p. es. G. Boaga, luogo citato). Poiché le variazioni dei lati risultano così funzioni di quelle degli angoli attorno al nodo (punto centrale dianzi considerato), così risulta manifesto il procedimento per la determinazione del valore del correlativo e delle correzioni dei lati.

In alcuni casi però è possibile ricorrere direttamente alla equazione (o alle equazioni) fra gli elementi lineari misurati, senza essere obbligati al calcolo preventivo degli angoli ed alla conseguente compensazione.

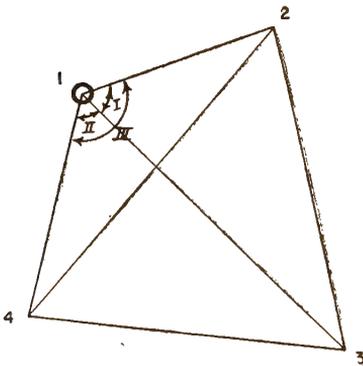


Fig. 7

A tale scopo consideriamo il caso di un quadrilatero di vertici 1, 2, 3, 4 (fig. 7), ordinati in ordine ciclico destrorso, i cui lati indicheremo con le notazioni (12), (23), (34), (41) e le diagonali con le (13), (24). Fissando l'attenzione su uno qualunque dei quattro vertici, p. es. sul vertice 1, consideriamo i tre triangoli aventi un angolo di vertice 1

(cioè i triangoli 123, 134, 124) ed a ciascuno di essi applichiamo il Teorema di Carnot in modo da ricavare i coseni degli angoli di vertice 1 ( $2\hat{1}3$ ,  $3\hat{1}4$ ,  $2\hat{1}4$ ) in funzione dei lati.

Poiché è:

$$2\hat{1}4 = 2\hat{1}3 + 3\hat{1}4$$

prendendo i coseni dei due membri, sviluppando il secondo membro ed esprimendo tutto in funzione dei soli coseni, si arriva con facilità alla identità:

$$\cos^2(2\hat{1}3) + \cos^2(3\hat{1}4) + \cos^2(2\hat{1}4) - 2\cos(2\hat{1}3)\cos(3\hat{1}4)\cos(2\hat{1}4) - 1 = 0. \quad [1]$$

Eliminando da questa le funzioni goniometriche introducendo i lati tramite i risultati ottenuti applicando ai triangoli accennati il Teorema del coseno, si perviene alla seguente *identità di Carnot*:

$$4(12)^2(13)^2(14)^2 - \left\{ (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 \right\}^2 (14)^2 -$$



$$\begin{aligned}
 & - \left\{ (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 \right\}^2 (13)^2 - \left\{ (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 \right\}^2 (12)^2 + \\
 & + \left\{ (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 \right\} \left\{ (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 \right\} \left\{ (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 \right\} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

La [1] può anche essere scritta sotto forma di determinante di terzo ordine simmetrico rispetto alla diagonale principale

$$\begin{vmatrix}
 1 & \cos(213) & \cos(214) \\
 \cos(213) & 1 & \cos(314) \\
 \cos(214) & \cos(314) & 1
 \end{vmatrix} = 0$$

e da questa ponendo:

$$A = 2(12)(13)(14) \quad A_{rs} = \left\{ (1r)^2 + (1s)^2 - (rs)^2 \right\} \frac{A}{2(1r)(1s)} \tag{3}$$

si perviene alla:

$$\begin{vmatrix}
 A & A_{23} & A_{24} \\
 A_{23} & A & A_{34} \\
 A_{24} & A_{34} & A
 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

che a meno del fattore  $A$  coincide con la [2].

Sostituendo nella [2] e nelle equivalenti al posto delle lunghezze ( $rs$ ) i risultati provenienti dalle misure, si arriva alla determinazione del *residuo di osservazione*  $\Delta$ ; allora, indicando con  $\delta(rs)$  le correzioni che si devono apportare alle lunghezze ( $rs$ ) perché la [2] rimanga soddisfatta, differenziando la [2] stessa, si perviene senza difficoltà ad una equazione del tipo:

$$M\delta(12) + N\delta(23) + P\delta(34) + Q\delta(41) + R\delta(13) + S\delta(24) = \Delta$$

con facile determinazione dei coefficienti  $M, N, P, Q, R, S$ .

Indicando poi con  $K$  il correlativo, poiché è:

$$\begin{aligned}
 \delta(12) &= K \cdot M, & \delta(23) &= K \cdot N, & \delta(34) &= K \cdot P, \\
 \delta(14) &= K \cdot Q, & \delta(13) &= K \cdot R, & \delta(24) &= K \cdot S
 \end{aligned} \tag{5}$$

esso risulterà determinato dalla:

$$K = \Delta : (M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 + R^2 + S^2)$$

e conseguentemente le [5] determineranno i valori più probabili delle correzioni  $\delta(12)$ , ecc.

Il « Coast and Geodetic Survey » (U.S.) ha misurato le lunghezze dei lati e delle diagonali del quadrilatero:



1) La Junta, 2) Garden City, 3) Cheyenne, 4) Imperial  
trovando i seguenti valori, espressi in miglia:

<i>I misura</i>	<i>II misura</i>	<i>differenza</i>
(12) 148.5341	(21) 148.5395	— 0.0054
(34) 173.7457	(43) 173.7471	— 14
(42) 181.3697	(24) 181.3694	+ 3
(14) 198.7043	(41) 198.7099	+ 94
(31) 227.2899	(13) 227.2868	+ 31
(32) 308.5241	(23) 308.5252	— 11.

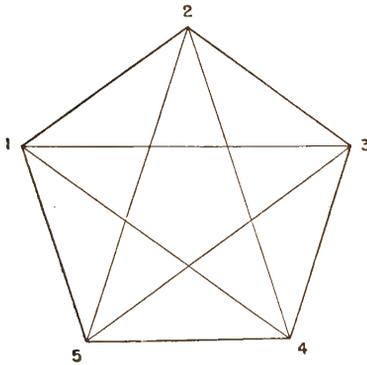


Fig. 8

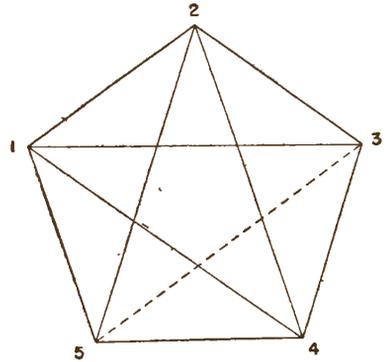


Fig. 9

I valori compensati risultano ordinatamente dei seguenti importi:

148.5384 173.7459 181.3678 198.7114 227.2855 308.5274,

essendo risultate le correzioni dei seguenti valori:

$$\delta(12) = +0.0016, \quad \delta(34) = -0.0005, \quad \delta(42) = -0.0018, \quad \delta(14) = +0.0018,$$

$$\delta(31) = -0.0028, \quad \delta(32) = +0.0028.$$

Passando ora a considerare il pentagono, potremo effettuare, come si è accennato, 10, oppure 9, oppure 8 misure, per avere dei controlli. Nel primo caso (fig. 8) dovranno essere soddisfatte tre equazioni di condizione del tipo [2] ricavate dai quadrilateri completi (1234), (2345), (3451) che si traggono dal pentagono stesso. La compensazione poi si può effettuare con gli ordinari procedimenti della Teoria dei minimi quadrati, per le osservazioni dirette condizionate.



Nel caso di 9 misure (p. es. 5 lati e 4 diagonali), supponendo (fig. 9) di non aver misurato la diagonale (35), le equazioni di condizione sono due, entrambe del tipo [2] che si ricavano considerando i quadrilateri completi (1234) e (1245).

Misurando invece 4 lati e 5 diagonali, supponendo (fig. 10) di non aver misurato il lato (45) le equazioni di condizione sono ancora due, definite dai quadrilateri (1234), (1235).

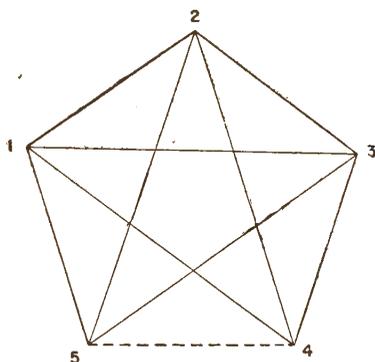


Fig. 10

Nel caso poi di 8 misure si potranno avere più eventualità (figg. 11):

a) lati (12), (23), (34), (45), (51)	diagonali (13), (25), (35)
b) idem	» (13), (25), (24)
c) » (12), (23), (34), (51)	» (13), (35), (52), (24)
d) » (12), (23), (51)	» (52), (24), (41), (13), (35)

e si dovrà sempre soddisfare ad una equazione di condizione.

Nel primo caso questa equazione è data dalla [2] relativa al quadrilatero (1235); il vertice 4 è un punto isolato e le lunghezze (34), (45) non sono soggette a compensazione.

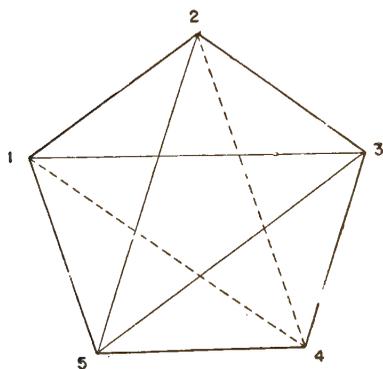


Fig. 11 a

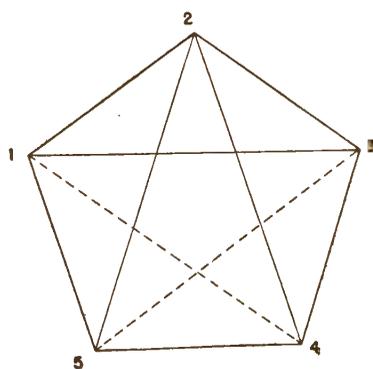


Fig. 11 b



Nel secondo caso entrano nella compensazione tutte le misure eseguite. L'equazione che deve essere soddisfatta è una generalizzazione della [2]. Essa si trae dalla identità goniometrica:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{123}) = & \cos(\widehat{125}) \cos(\widehat{524}) \cos(\widehat{423}) - \cos(\widehat{125}) \cos(\widehat{524}) \operatorname{sen}(\widehat{423}) - \\ & - \cos(\widehat{125}) \cos(\widehat{423}) \operatorname{sen}(\widehat{524}) - \cos(\widehat{524}) \cos(\widehat{423}) \operatorname{sen}(\widehat{125}) \end{aligned}$$

dopo di aver sostituito alle funzioni *seno* le funzioni *coseno*, razionalizzando e sostituendo al posto dei coseni le espressioni che si ottengono in funzione dei lati, ricorrendo al Teorema di Carnot, per i triangoli (123), (125), (524), (423).

Negli ultimi due casi *c*), *d*), il vertice 4 rimane isolato, come nel

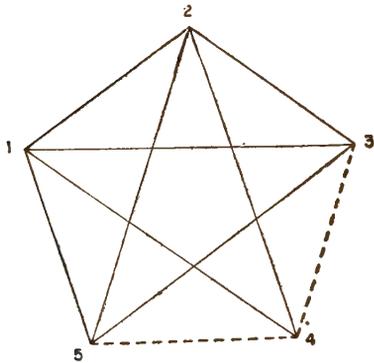


Fig. 11 c

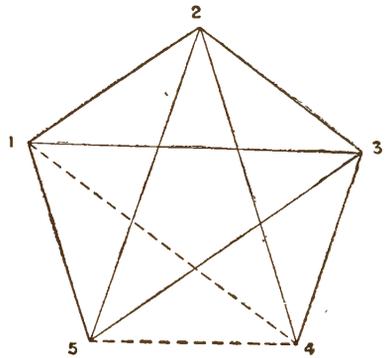


Fig. 11 d

primo caso e le lunghezze da compensare sono solo quelle che definiscono il quadrilatero completo (1235).

Si vede così dall'analisi fatta che limitando ad 8 soltanto le misure, la conformazione più idonea è quella data dal caso *b*) per la quale tutti gli 8 elementi misurati entrano nella compensazione.

In questo ordine di idee conviene anche considerare i casi riportati nella fig. 12, dove con tratto continuo sono indicate le misure effettuate, ma sostanzialmente il ragionamento fatto non muta.

Col caso *b*) è stata fatta presente la possibilità di una generalizzazione della equazione [2], facciamo ora presente che possiamo estenderla facilmente al caso di  $n$  vertici 1, 2, 3, ...  $n$  collegati come nel caso *b*).

Indicando ancora col simbolo ( $rs$ ) le lunghezze dei segmenti in-



dividuiati dai vertici  $r$  ed  $s$ , che potranno essere lati o diagonali, ponendo:

$$A = 2(12)(13)(14) \dots (1n) \quad A_{rs} = \left\{ (1r)^2 + (1s)^2 - (rs)^2 \right\} \frac{A}{2(1r)(1s)}$$

si giunge alla

$$\begin{vmatrix} A^k & A^k_{23} & A^k_{24} & \dots & A^k_{2n} \\ A^k_{32} & A^k & A^k_{34} & \dots & A^k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^k_{12} & A^k_{13} & A^k_{14} & \dots & A^k \end{vmatrix} = 0 \quad [6]$$

con  $k \leq n - 3$ . Per  $n = 4$  si ricava la [2].

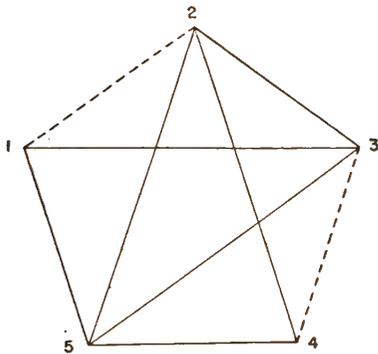


Fig. 12 a

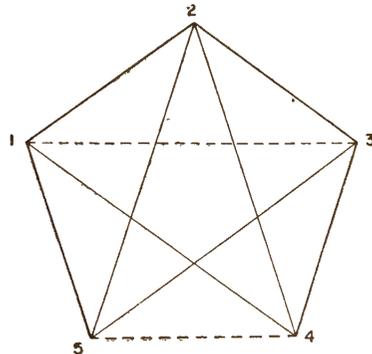


Fig. 12 b

La [6] è stata data da G. Candido nel 1935 in uno studio dal titolo « Generalizzazione di relazioni classiche per distanze di punti ».

La [4] invece è stata scritta dal Brioschi nel 1855 (Nouv. Ann., pag. 172) sotto la forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ 1 & (12)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ 1 & (13)^2 & (23)^2 & 0 & (34)^2 \\ 1 & (14)^2 & (24)^2 & (34)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

riportata recentemente dal prof. Hart nella Nota ricordata nella introduzione.



Da quest'ultima relazione il Salmon nelle sue « Lezioni di algebra superiore » ricava la forma ridotta seguente:

$$\begin{vmatrix} 2(12)^2 & (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 & (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 \\ (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 & 2(13)^2 & (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 \\ (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 & (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 & 2(14)^2 \end{vmatrix} = 0$$

che — come ha dimostrato il Candido nello studio ora ricordato — può essere facilmente generalizzata per il caso di  $n$  punti con  $n > 4$ .

4. — Il Radar può essere anche adoperato con profitto nella misura di lunghi archi di meridiano, e quindi concorrere alla risoluzione del problema fondamentale della Geodesia. In questo caso le misure effettuate possono essere soggette ad opportuna compensazione.

Così p. es. se si deve misurare lo allineamento  $\overline{P_1P_4}$  suddividendolo in sezioni  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}$ ,  $\overline{P_3P_4}$  si potranno assoggettare a misura dette sezioni e le  $\overline{P_1P_3}$ ,  $\overline{P_1P_4}$ ,  $\overline{P_2P_4}$ , ossia tutte quelle che si ottengono combinando a due a due gli estremi delle stesse. In questo caso fra le misure effettuate sussiste la seguente relazione di Pappo:

$$\overline{P_1P_2}^2 \cdot \overline{P_3P_4} + \overline{P_1P_3}^2 \cdot \overline{P_4P_2} + \overline{P_1P_4}^2 \cdot \overline{P_2P_3} + \overline{P_2P_3} \cdot \overline{P_3P_4} \cdot \overline{P_4P_2} = 0$$

che può essere facilmente generalizzata (Chasles) e che è valevole anche quando uno dei punti non è collineare con gli altri tre (Fagnano, 1743) con che si ottiene il così detto Teorema di Stewart.

La relazione scritta permette dunque la compensazione delle misure fatte e perciò costituisce un notevole caposaldo nei nuovi indirizzi nei metodi di rilevamento degli allineamenti.

Da ultimo osserviamo che in questo particolare problema si può anche effettuare la compensazione applicando il metodo adottato dallo Schreiber nella compensazione delle misure angolari osservate col metodo delle combinazioni binarie.

Abbiamo voluto accennare a questi nuovi procedimenti, anche con una certa larghezza, in quanto riteniamo che essi costituiscano la base di nuovi studi e di nuove ricerche nel campo non solo della Geodesia operativa, ma altresì in quello della Geodesia teoretica, in quanto questi nuovi metodi allargano in maniera considerevole i campi (p. es. quello di Weingarten) per i quali la Geodesia teoretica fornisce le formule adatte per le risoluzioni dei vari problemi geodetici. Ci troviamo dunque ad una svolta dell'indirizzo classico della Geodesia e nuovi



studi, nuove generalizzazioni, si impongono per poter risolvere i problemi fondamentali della Geodesia, in campi più vasti, dove non è più sufficiente la considerazione del campo sferico e conseguentemente gli indirizzi di Gauss sulle superficie applicabili.

*Roma — Istituto di Geodesia e Topografia della Facoltà di Ingegneria  
— 28 Marzo 1949.*

### RIASSUNTO

*Vengono dapprima illustrati brevemente i principî sui quali si basano i procedimenti di misurazione delle distanze con mezzi elettrici, poi vengono messi in luce alcuni importanti lavori effettuati durante la guerra e stabiliti i criteri fondamentali per la compensazione della trilaterazione.*

