SULLA RISOLUZIONE DEL TRIANGOLO GEODETICO

Prof. GIOVANNI BOAGA

Sono noti in Geodesia i metodi di Bessel, di Gauss e di altri Autori per la risoluzione dei grandi triangoli geodetici. E' pure noto il metodo di Legendre, che risolve un triangolo geodetico di lati di lunghezze inferiori ad un centinaio di chilometri, mediante un triangolo piano ausiliario, di lati di lunghezze eguali a quelle del triangolo geodetico e di angoli eguali a quelli del triangolo ellissoidico diminuiti ciascuno della terza parte dell'eccesso sferico. Tale eccesso sferico viene calcolato dividendo la superficie del triangolo per il quadrato del raggio della sfera locale, ossia per il quadrato del raggio della sfera osculatrice la calotta ellissoidica, sulla quale il triangolo è sviluppato, che equivale al prodotto dei raggi principali di curvatura ellissoidici, valutati in un punto interno del triangolo.

Ne risulta che più triangoli, che si succedono in catena o triangolazione, vengono riferiti a varie sfere locali e quindi possono essere considerati come sviluppati su altrettante faccie poliedriche curve che si sviluppano sul piano.

E' da tenere poi presente che in molti Paesi la cartografia è poggiata essenzialmente su una rappresentazione conforme (Lambert, Gauss, ecc.), rappresentazione che conserva gli angoli, e che per i vertici trigonometrici vengono date in generale le coordinate piane della rappresentazione adottata. Sorge spontanea allora l'idea di esaminare se, con gli elementi piani della rappresentazione, è possibile arrivare agli elementi (lati ed angoli) del triangolo geodetico ellissoidico. La risposta a questo problema è positiva, ed una applicazione per le catene trigonometriche dell'Isola di Madagascar è stata fatta una ventina d'anni or sono con riferimento alla proiezione stereografica. Altra applicazione, per la proiezione di Gauss, è stata eseguita dal Ten. Col. M. Menestrina dell'Istituto Geografico Militare italiano (*) con procedimenti attualmente in uso in detto Istituto.

Non è da escludere che anche in altri Uffici, in altri Paesi, siano adottati procedimenti analoghi.

La questione, dato che il problema ammette soluzione, va allora considerata da un altro punto di vista: essa esige di trovare un procedimento per la risoluzione del triangolo geodetico attraverso le coordinate piane rettangolari della rappresentazione conforme dell'ellissoide sul piano, qualunque sia il tipo seguito per realizzare tale rappresentazione, sia essa quella di Mercatore o di Lambert, quella di Gauss o stereografica, ecc.

Può essere perciò utile esporre alcune formule ed alcuni concetti, atti a condurre alla risoluzione pratica del problema, senza per questo, ripetiamo, essere obbligati a particolarizzare il tipo della rappresentazione.

Nel seguito adotteremo i simboli φ, λ, N per indicare rispettivamente la latitudine, la longitudine e il raggio principale di curvatura della sezione del primo verticale (gran normale ellissoidica).

Indicheremo poi con A, B, C i tre vertici del triangolo geodetico ellissoidico, e con

(*) Cfr. la Bibliografia annessa.

P, Q, R i corrispondenti vertici omologhi sul piano, ottenuti con la rappresentazione conforme, mediante le generiche equazioni della carta:

$$(1) \qquad x = x(\varphi, \lambda) \qquad y = y(\varphi, \lambda)$$

e noteremo come gli archi geodetici AB, BC, CA, lati del triangolo, hanno i loro omologhi sul piano della rappresentazione, individuati da archi curvilinei (*trasformate piane*) le cui equazioni parametriche sono proprio le (1) quando in esse si facciano variare con continuità φ, λ sull'arco geodetico considerato, da un vertice all'altro.

Nella rappresentazione conforme il rapporto η fra due elementi lineari omologhi del piano e dell'ellissoide risulta funzione della sola ascissa y mediante la:

$$(2) \qquad \eta = \eta(y) = 1 + \frac{y^2}{2N^2} + \cdots$$

Secondo il *Teorema di Schols*: *la curvatura k della trasformata piana PQ di un arco di geodetica ellissoidica AB, ottenuta con rappresentazione conforme, è data dalla variazione della curvatura geodetica prodotta dalla rappresentazione conforme nella direzione considerata.*

Per comprendere il significato di questo teorema, fondamentale per il problema in discussione, è necessario rammentare che per *curvatura geodetica* di una curva di una superficie, in un punto, si intende la curvatura della curva piana proiezione della curva della superficie sul piano tangente, nel punto considerato.

Ne consegue che le geodetiche sono caratterizzate da avere costantemente nulla la curvatura geodetica.

In base a ciò la curvatura K è data dalla derivata logaritmica del rapporto η rispetto alla direzione normale PQ.

Simbolicamente, indicando brevemente con *ln* il logaritmo naturale, il *teorema di Schols* tradotto in simboli diviene (1):

$$(3) \qquad k = \frac{d}{dn}(ln\,\eta) = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dn} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\delta\eta}{\delta y}\frac{dx}{dn} + \frac{\delta\eta}{\delta x}\frac{dy}{dn}\right)$$

con n direzione considerata.

Se α indica l'angolo di direzione della corda PQ, si hanno le:

$$\frac{dx}{dn} = sen\,\alpha \qquad \frac{dy}{dn} = -\cos\alpha$$

in quanto l'angolo di direzione della n è considerato $\alpha + 90°$. Tenendo conto di ciò e della (2), la (3) diviene, trascurando i termini in y^4 e superiori,

$$(4) \qquad k = -\frac{1}{\eta}\frac{\delta\eta}{\delta y} \cdot \cos\alpha = -\frac{y}{N^2} \cdot \cos\alpha\,.$$

(1) Indichiamo coi simboli $\frac{\delta\eta}{\delta x}$ ecc. le derivate *parziali*.

Considerato poscia sul piano un sistema cartesiano ortogonale di assi u, v il primo dei quali tangente alla trasformata in P, ed indicato con β il suo angolo di direzione , con γ l'angolo formato dalla corda e dall'asse u, avremo:

$$\beta = \alpha - \gamma \tag{5}$$

da cui risulta il *carattere di riduzione* dell'angolo γ, sì che esso si può denominare « *angolo di riduzione* ».

Preso sulla trasformata PQ un punto M successivo a P, la tangente t alla PQ per M darà origine ad un angolo β' di direzione; l'angolo $\Delta\beta$ fra le tangenti in P ed in M, angolo di contingenza, è dato dalla:

$$\Delta\beta = \beta - \beta' \tag{6}$$

per cui indicato con Δs l'elemento lineare PM, avremo per definizione di curvatura di una linea piana, la:

$$k = \lim_{s=o} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{d\beta}{ds} . \tag{7}$$

Indicando poi con du e dv le proiezioni dell'elemento ds rispettivamente sull'asse u e sull'asse v, valgono le:

$$\begin{aligned} du &= -ds \cdot sen\,(\Delta\beta) = -ds\left\{\Delta\beta - \frac{(\Delta\beta)^3}{6} + \cdots\right\} \\ dv &= ds \cdot cos\,(\Delta\beta) = ds\left\{1 - \frac{(\Delta\beta)^2}{2} + \cdots\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

dove i secondi membri sono stati ottenuti con gli sviluppi in serie delle funzioni goniometriche *seno* e *coseno*.

D'altra parte, indicando con $\dot{k}$ e $\ddot{k}$ le derivate intrinsiche prima e seconda di k, cioè le derivate rispetto all'arco s, per lo sviluppo accorciato di Mac-Laurin, per il punto della trasformata piana di coordinata curvilinea s, si ha:

$$k = \dot{k}_0 + s \cdot \ddot{k}_0 + \frac{1}{2} \times s^2 \cdot k_0 + \cdots \tag{9}$$

Eliminando k dalle (7) e (9) si ottiene una equazione differenziale a variabili β e s separabili, e quindi la sua integrazione risulta immediata. Effettuando la integrazione da P a Q, cioè da O a s per la coordinata s e da β a β' per l'angolo di direzione, si giunge alla:

$$\beta' - \beta = s \cdot k_0 + \frac{1}{2} s^2 \cdot \dot{k}_0 + \frac{1}{6} s^3 \cdot \ddot{k}_0 + \cdots \tag{10}$$

Tenendo conto della (6), introducendo il risultato ora ottenuto nella (8), si ottengono altre due equazioni differenziali a variabili separate, che mediante integrazioni

forniscono le due serie seguenti, in funzione della curvatura e delle sue derivate calcolate nell'origine P della trasformata:

$$(11)\qquad \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2}s^2\cdot k_0 - \frac{1}{6}s^3\cdot \dot{k}_0 + \frac{1}{24}s^4\cdot (k^3_0 - \ddot{k}_0) + \cdots \\ v &= s - \frac{1}{6}s^3 k_0^2 - \frac{1}{8}s^4\cdot k_0\cdot \dot{k}_0 + \cdots \end{aligned}$$

che rappresentano in termini finiti le equazioni parametriche della trasformata rispetto il sistema (P, u, v) e che permettono la determinazione dell'angolo γ introdotto con la (5).

Se L è la lunghezza della trasformata PQ, ponendo nella (11) L al posto di s, si otterranno le coordinate u_Q v_Q dell'estremo Q per cui,indicando con D la lunghezza del segmento rettilineo PQ (corda della trasformata), si ha:

$$(12)\qquad D = \sqrt{u_Q^2 + v_Q^2}$$

onde, introducendo le (11) e svolgendo in serie la radice quadrata, dopo aver messo in evidenza L^2 nel radicando, si giunge alla:

$$(13)\qquad D = L - \frac{1}{24}L^3\cdot k_0^2 - \frac{1}{24}L^3\cdot k_0\cdot \dot{k}_0 + \cdots$$

la quale ci dice che: *la lunghezza della trasformata differisce dalla lunghezza della relativa corda almeno per quantità piccole del terzo ordine.*

La curvatura k_m nel punto di mezzo dell'arco PQ, si ottiene con lo sviluppo (9) di Mac-Laurin, ponendo in esso s = L/2. Si trova con ciò:

$$(14)\qquad k_m = k_0 + \frac{1}{2}L\cdot \dot{k}_0 + \cdots$$

ed eliminando dalle (13) e (14) la curvatura k_0 all'origine della trasformata si ottiene la:

$$(15)\qquad D = L - \frac{1}{24}L^3\cdot k^2_m + T_5$$

con T_5 termini almeno del quinto ordine in L.

L'angolo γ è dato dalla:

$$(16)\qquad sen\,\gamma = -u_Q : D$$

per cui introducendo le (11) e (15) si arriva alla:

$$sen\,\gamma = \frac{1}{2}L\cdot k_0 + \frac{1}{6}L^2\cdot \dot{k}_0 + L^3\cdot \left(\frac{1}{24}\ddot{k}_0 - \frac{1}{48}k^3\right) + \cdots$$

ed esplicitando γ per il tramite della serie inversa:

$$\gamma = sen\,\gamma + \frac{1}{6}sen^3\gamma + \cdots$$

si ottiene:

$$\gamma = \frac{1}{2} L \cdot k_0 + \frac{1}{6} L^2 \cdot \dot{k}_0 + \frac{1}{24} L^3 \cdot \ddot{k}_0 + \dots \quad (17)$$

Se N è un punto della trasformata PQ tale che risulti:

$$(arco\ PN) : (arco\ PQ) = 1 : 3, \quad (18)$$

e se k_N è la curvatura della trasformata in quel punto, ancora per lo sviluppo (9), si ha:

$$k_N = k_0 + \frac{1}{3} L \cdot \dot{k}_0 + \frac{1}{18} L^2 \cdot \ddot{k}_0 + \dots \quad (19)$$

per cui: *si rende possibile dalle* (17) *e* (18) *la eliminazione della curvatura* k_0 *e del termine di secondo ordine.* Difatti, operando in questo senso, si arriva al risultato:

$$\gamma = \frac{1}{2} L \cdot k_N + \frac{1}{72} L^3 \cdot \ddot{k}_0 + \dots$$

e con l'abbandono dei termini del terzo ordine, tenendo conto della (15):

$$\gamma'' = \frac{1}{2 \cdot arc\ 1''} \cdot D \cdot k_N \cdot \quad (20)$$

Ma per il *Teorema di Schols*, formula (4), e per la (18):

$$k_N = -\frac{y_N \cdot \cos \alpha}{N^2} = -\frac{(2 y_P + y_Q) \cos \alpha}{3 N^2}$$

e

$$D = (x_Q - x_P) : \cos \alpha$$

sicchè, surrogando questi valori nella (20), *si ottiene la forma definitiva della riduzione* γ'' *valevole per qualunque tipo di rappresentazione conforme*:

$$\gamma'' = (x_P - x_Q) \cdot (2 y_P + y_Q) : 6\ arc\ 1'' \cdot N_N^2 \quad (21)$$

in funzione delle coordinate degli estremi P e Q della trasformata data dalle equazioni della carta (1).

La *convergenza* Γ *del meridiano* in P è dato dalla:

$$\Gamma_P = arc\ tang\ (dx : dy)_P \quad (22)$$

per cui l'*azimut ellissoidico* Θ_A dell'arco geodetico AB è fornito dalla

$$\Theta_{AB} = \Gamma_P + \alpha_{PQ} + \gamma_{PQ} \quad (23)$$

e quello coniugato Θ_{BA} della geodetica dell'arco ellissoidico BA:

$$\Theta_{BA} = \Gamma_Q + 180^0 + \alpha_{PQ} - \gamma_{QP}. \tag{24}$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni si trova *l'angolo fra i meridiani ellissoidici passanti per gli estremi della geodetica.* Tale angolo vale ovviamente:

$$(\Gamma_P - \Gamma_Q) + (\gamma_{PQ} + \gamma_{QP}) - 180^0. \tag{25}$$

Per la (15) si può sostituire alla lunghezza L della trasformata la lunghezza D della corda ed il modulo di deformazione lineare definito con la (2) per elementi infinitesimi viene espresso per elementi finiti dalla:

$$\eta = \frac{D}{g} = 1 + \frac{y_P^2 + y_P y_Q + y_Q^2}{6 \quad N_N^2} \tag{26}$$

con g lunghezza dell'arco di geodetica AB.

Da questa si traggono le:

$$D = g \cdot \eta \tag{27}$$

$$g = D : \eta \tag{28}$$

che permettono il calcolo della lunghezza della corda della trasformata data la lunghezza dell'arco di geodetica ellissoidica e, reciprocamente, la determinazione della lunghezza dell'arco di geodetica ellissoidica nota la lunghezza della corda della trasformata, per mezzo degli elementi della rappresentazione piana conforme.

Note le coordinate degli estremi della corda della trasformata, *l'angolo di direzione* α e la *lunghezza della corda* si traggono dalle note formule:

$$tang\, \alpha = (x_Q - x_P) : (y_Q - y_P) \tag{29}$$

$$D = (x_Q - x_P) : cos\, \alpha = = (y_Q - y_P) : sen\, \alpha = \\ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}. \tag{30}$$

Le formule esposte sono fondamentali per la risoluzione del triangolo geodetico per mezzo degli elementi della rappresentazione conforme.

Difatti: se il triangolo geodetico ellissoidico è dato per mezzo delle coordinate geografiche dei suoi vertici, le (1) permettono di calcolare le coordinate dei vertici omologhi della trasformata piana, che sono pure vertici del triangolo delle corde. Per mezzo delle (30) e (31) si calcoleranno gli angoli di direzione delle tre corde e le rispettive lunghezze. Successivamente, con la formula (21), verranno calcolate le sei riduzioni angolari, due per ciascun lato, e con la (22) le tre convergenze dei meridiani nei vertici della trasformata. Infine, con la (26), i moduli di deformazione lineare dei tre lati. Con ciò gli azimut degli archi geodetici del triangolo ellissoidico e le rispettive lunghezze si valutano con le formule del tipo (23), (24) e (28).

Il metodo esposto è generale e vale per qualunque tipo di rappresentazione conforme.

Disponendo di Tavole numeriche, e di opportuni moduli per i calcoli delle varie grandezze, come dispone attualmente l'I. G. M. italiano, è possibile rendere quanto mai facili e spediti detti calcoli, e conseguentemente risolvere tutti i problemi concernenti i triangoli geodetici, attraverso la risoluzione dei triangoli delle corde omologhe. Queste possibilità sono già state messe in evidenza e si trovano riassunte nelle note elencate nella annessa Bibliografia.

M. MENESTRINA: - *Confronto fra le determinazioni delle coordinate geografiche dei vertici di una rete di primo ordine eseguite col procedimento classico e con le formule della rappresentazione piana di Gauss.* - « Bollettino Geodetico dell'I. G. M. », in Rivista « L'Universo », Firenze, 1942).

G. BOAGA: - *Sul problema inverso del trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di geodetica sull'ellissoide terrestre* - Idem, Anno 1943.

» - *Sulla rappresentazione della sfera sul piano mediante i principii gaussiani* - Idem, Anno 1943.

» - *Sviluppi in serie delle formule della rappresentazione conforme dell'ellissoide terrestre sul piano* - Idem, Anno 1943.

» - *Scostamento di un breve arco di trasformata piana di un arco di geodetica ellissoidica per mezzo della rappresentazione conforme, dal segmento lineare che ne congiunge gli estremi* - Idem, Anno 1943.

» - *Differenze fra le coordinate geografiche dei vertici di una rete geodetica, riferita a due diversi ellissoidi egualmente orientati* - Idem, Anno 1943.

C. TROMBETTI: - *Sul passaggio dalle coordinate piane gaussiane alle coordinate geografiche* - Idem, Anno 1943.

» - *Sulla convergenza dei meridiani nella rappresentazione conforme di Gauss in funzione delle coordinate piane* - Idem, Anno 1943.

» - *Sulla trasformazione delle coordinate piane gaussiane per cambiamento di fuso* - Idem, Anno 1943.