

SULLA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI GEODETICI ELLISSOIDICI ATTRAVERSO LA LORO RAPPRESENTAZIONE PIANA CONFORME

Il presente contributo va inteso come una applicazione dei principii generali relativi alla *trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati su una superficie qualunque*, esposti fin dal 1934 da T. Levi-Civita in una magistrale Memoria inserita nei «Compositio Mathematica» (1) e generalizzati in seguito da A. Tonolo (2) e C. Morelli (3), il primo dei quali ha anche applicato le formule dedotte alla risoluzione di taluni classici problemi di Geodesia (4).

Levi-Civita, Tonolo, Morelli hanno stabilito delle formule valide rispettivamente in seconda, terza e quarta approssimazione, atte al passaggio dagli elementi di un triangolo curvi-

(1) LEVI-CIVITA T. - *Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria*. «Compositio Mathematica», Vol. I, fasc. I, 1934.

LEVI-CIVITA T. - *La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie*. «Rend. Seminario Matem. e Fisico di Milano», Vol. XII, 1938.

(2) TONOLO A. - *Il teorema dei seni per i triangoli tracciati sopra una superficie*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», Vol. XIX, serie VI, 1934.

TONOLO A. - *Studi di trigonometria dei triangoli tracciati sopra una superficie*. «Atti R. Ist. Veneto di S. L. ed A.», tomo XCIII, 1934.

TONOLO A. - *Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una superficie*. «Compositio Mathematica», Vol. II, fasc. 3, 1935.

TONOLO A. - *Estensione di un teorema trigonometrico di Legendre*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», Vol. XXVIII, serie VI, 1938.

TONOLO A. - *Sui polinomi di Frenet*. «Atti del R. Ist. Veneto di S. L. ed A.», tomo XCVIII, 1938.

TONOLO A. - *Studi di trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie*. «Rend. Seminario Matem. e Fisico di Milano», Vol. XIII, 1939.

TONOLO A. - *Estensione di un teorema trigonometrico di Gauss sui triangoli geodetici*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», Vol. XXIX, serie VI, 1939.

TONOLO A. - *Sviluppi di Puiseux Weingarten generalizzati*. Ibidem, Vol. XXIX, serie VI, 1939.

(3) MORELLI C. - *Formule fondamentali per l'estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque*. «Atti Reale Acc. d' Italia», Memorie. Volume XIII, 1942.

MORELLI C. - *Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque*. «Rend. classe di Scienze Fisiche, Mat. e Nat. della R. Acc. d' Italia», Vol. III, serie VI, 1942.

MORELLI C. - *Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati*. Idem, vol. IV, 1943.

MORELLI C. - *Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati*. Idem, vol. IV, 1943.

MORELLI C. - *Il teorema di Gauss generalizzato alla quarta approssimazione*. «Boll. Geodetico dell' I.G.M. in Rivista «L' Universo», 1942.

(4) TONOLO A. - *Trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo un arco di linea qualunque di un ellissoide di rotazione*. «Rend. Reale Acc. Naz. dei Lincei», Vol. XXIX, serie VI, 1939.

TONOLO A. - *Contributo alla trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati sopra una superficie*. «Atti del II Congresso dell' U. M. I.», Bologna, 1940.

Altre questioni geodetiche sono state ulteriormente svolte con tali procedimenti analitici da A. MARCANTONI (vedi nel Boll. Geodetico dell' I. G. M. in Rivista «L' Universo», 1941, 1943 gli studi dai titoli: «Sul



lineo qualunque di una superficie pure qualunque agli elementi del triangolo (geodetico) formato da archi di geodetiche della superficie, passanti per i vertici del triangolo curvilineo.

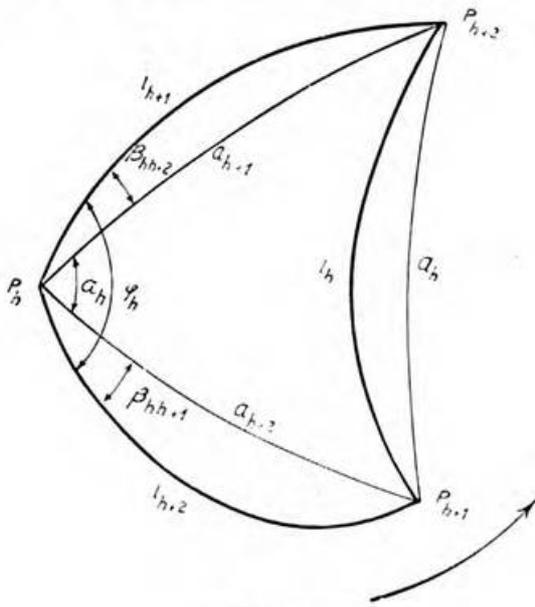


Fig. 1.

P_{h+1} , P_{h+2} , e con $\varphi_h, \varphi_{h+1}, \varphi_{h+2}, \alpha_h, \alpha_{h+1}, \alpha_{h+2}$ gli angoli corrispondenti in tali vertici, il Morelli, esplicitando le formule fino ai termini del quarto ordine è pervenuto alle seguenti relazioni, dalle quali scendono come casi particolari quelle del Tonolo e del Levi-Civita :

$$[1] \quad a_h = l_h \left\{ 1 - X_h + T_5 \right\}$$

con T_5 termini almeno del quinto ordine, e :

$$[2] \quad X_h = \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^2 - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{192} \gamma_h^4 + \frac{1}{8} K_h \gamma_h^2 - \frac{1}{8} \gamma_h \ddot{\gamma}_h - \frac{1}{9} \dot{\gamma}_h^2 \right) l_h^4$$

$$[3] \quad \alpha_h = \varphi_h - \beta_{h, h+1} - \beta_{h, h+2}$$

con :

$$[4] \quad \beta_{h, h+1} = \frac{1}{2} \gamma_{h+2} l_{h+2} - \frac{1}{12} \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2 + \frac{1}{48} (\ddot{\gamma}_{h+2} + 2 \dot{K}_{h+2} \gamma_{h+2}) l_{h+2}^3 - \frac{1}{240} \left(\frac{1}{2} \gamma_{h+2}^3 + \frac{1}{3} \gamma_{h+2}^2 \dot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} K_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} + 9 \dot{K}_{h+2} \gamma_{h+2} \right) l_{h+2}^4 + T_5$$

trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di geodetica dell'ellissoide terrestre » e « Sulla misura di un arco di parallelo ». Vedi pure : BOAGA G., *Sul trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica su una superficie qualunque con applicazioni al problema geodetico del trasporto delle coordinate geografiche.* (Boll. Geodetico dell' I. G. M. in Rivista « L' Universo », anno 1942) e BOAGA G., *Il trasporto delle coordinate curvilinee di un arco di geodetica in alcuni casi particolari interessanti la geodesia.* (Rend. Classe di Scienze del R. Ist. Lombardo di S. L., vol. LXXV, 1942).

(5) Una esposizione sommaria delle ricerche di Levi-Civita e Tonolo trovasi nella nota : BOAGA G., *Su alcuni recenti studi geometrici interessanti la geodesia.* Rivista « L' Universo », anno 1940.



ed analoga ponendo $h+2$ al punto di $h+1$ e reciprocamente, cambiando però il segno al secondo ed all'ultimo addendo del secondo membro ⁽⁶⁾.

Nella [3] effettuando la somma :

$$[5] \quad \beta_{h, h+1} + \beta_{h, h+2} = \delta_h$$

si ottiene la :

$$[6] \quad \alpha_h = \varphi_h - \delta_h$$

con :

$$[7] \quad \delta_h = \frac{1}{2} \left\{ \gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2} \right\} + \frac{1}{12} \left\{ \dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1} - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2} \right\} + \\ + \frac{1}{48} \left\{ (\ddot{\gamma}_{h+1} + 2 K_{h+1} \gamma_{h+1}) l_{h+1} + (\ddot{\gamma}_{h+2} + 2 K_{h+2} \gamma_{h+2}) l_{h+2} \right\} + \\ + \frac{1}{240} \left\{ \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} \gamma^2_{h+1} \dot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} K_{h+1} \dot{\gamma}_{h+1} + 9 K_{h+1} \gamma_{h+1} \right) l_{h+1} \right\} + \\ + \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} \gamma^2_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} K_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} + 9 K_{h+2} \gamma_{h+2} \right) l_{h+2} + T''_5 .$$

Nelle formule riportate è interessante il fatto che la curvatura K della superficie non interviene quando si considerano soltanto i termini di primo e secondo ordine; essa interviene con i termini del terzo ordine, e la sua derivata intrinseca appare nei termini del quarto ordine. Nei calcoli parziali sia K sia \dot{K} risultano messe in evidenza anche nei termini di ordine inferiore, solo poi si elidono effettuando le riduzioni dei termini simili.

Dal punto di vista geometrico questo fatto significa che quando si considerano i termini di primo e secondo ordine la superficie dell'intorno in cui è tracciato il piccolo triangolo curvilineo che si considera, si confonde col piano tangente (campo topografico); nel caso successivo l'intorno si confonde con la sfera osculatrice - sfera locale - (campo geodetico).

Particolarizzando le [2] e [7] ponendo in esse $K = 0$ si ottengono le *formule generali relative alle relazioni intercedenti fra gli elementi del triangolo curvilineo piano di vertici P_h, P_{h+1}, P_{h+2} e quelli del triangolo delle corde rettilinee.*

Tali formule sono :

$$[2'] \quad X_h = \frac{1}{24} \gamma^2_{h+1} l^2_{h+1} - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{192} \gamma^4_{h+1} - \frac{1}{8} \gamma_{h+1} \ddot{\gamma}_{h+1} - \frac{1}{9} \dot{\gamma}^2_{h+1} \right) l_{h+1}$$

$$[7'] \quad \delta_h = \frac{1}{2} \left\{ \gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2} \right\} + \frac{1}{12} \left\{ \dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1} - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2} \right\} + \\ + \frac{1}{48} \left\{ \ddot{\gamma}_{h+1} l_{h+1} + \ddot{\gamma}_{h+2} l_{h+2} \right\} + \\ + \frac{1}{240} \left\{ \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+1} + \frac{1}{3} \gamma^2_{h+1} \dot{\gamma}_{h+1} \right) l_{h+1} + \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} \gamma^2_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} \right) l_{h+2} \right\} + T''_5 .$$

⁽⁶⁾ Tale cambiamento di segno viene giustificato dai segni che assumono le derivate successive delle curvature avuto riguardo dal senso positivo della circolazione sul perimetro del triangolo (vedi MORELLI, *Estensione*, ecc.).



La [4] diviene analogamente :

$$[4'] \quad \beta_{1, h+1} = \frac{1}{2} \gamma_{h+2} l_{h+2} - \frac{1}{12} \dot{\gamma}_{h+2} l^2_{h+2} + \frac{1}{48} \ddot{\gamma}_{h+2} l^3_{h+2} - \\ - \frac{1}{240} \left(\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3} \gamma^2_{h+2} \dot{\gamma}_{h+2} \right) l^4_{h+2} + T'_5 \quad .$$

In questa è possibile eliminare il secondo addendo del secondo membro (termine di secondo ordine) introducendo la curvatura γ nel punto C che divide l'arco in due parti proporzionali ai numeri 1 e 2. Con lo sviluppo di Mac-Laurin si ha difatti, trasportando la curvatura e le loro derivate da M in C :

$$\gamma_c = \gamma - \frac{l}{6} \dot{\gamma} + \frac{l^2}{72} \ddot{\gamma} - \frac{l^3}{696} \ddot{\gamma} + \dots \\ \dot{\gamma}_c = \dot{\gamma} - \frac{l}{6} \ddot{\gamma} + \frac{l^2}{72} \ddot{\gamma} + \dots \\ \ddot{\gamma}_c = \ddot{\gamma} - \frac{l}{6} \ddot{\gamma} + \dots \\ \ddot{\gamma}_c = \ddot{\gamma} + \dots$$

ed eliminando da queste e dalla [4'] le $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots$ riferentisi al punto di mezzo del lato curvilineo, risulta :

$$[4''] \quad \beta = \frac{1}{2} \gamma_c l - \frac{l^3}{72} \ddot{\gamma}_c - \frac{13}{3240} l^4 \ddot{\gamma}_c - \frac{l^4}{720} \gamma^2_c \dot{\gamma}_c + T'_5$$

dove per brevità di scrittura non si sono apposti gli indici $h, h+1, h+2$ a β, l, γ .

Analoga osservazione vale per la [7'].

Le formule [2'], [7'] si semplificano ulteriormente quando viene fatta l'ipotesi che i lati curvilinei siano di curvatura costante, ossia siano archi di cerchio. In questo caso esse si trasformano nelle :

$$X_h = \frac{1}{24} \gamma^2_h l^3_h \left(1 - \frac{1}{80} \gamma^2_h l^2_h \right) \\ \delta_h = \frac{1}{2} \left(\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2} \right)$$

che rappresentano una generalizzazione delle formule trovate direttamente dal Levi-Civita nella seconda delle Note richiamata alla nota (1).

Per i triangoli curvilinei piani che interessano in modo speciale la geodesia e la cartografia sono quelli ottenuti dai triangoli geodetici ellissoidici per rappresentazione conforme della superficie ellissoidica σ - ritenuta superficie di riferimento per le misure geodetiche - sul piano π .

Indicando con U e λ rispettivamente la latitudine isoterma e la longitudine geografica dei punti P della superficie obbiettiva σ , l'elemento lineare di tale superficie acquista la forma isoterma :

$$[8] \quad d g^2 = r^2 (d U^2 + d \gamma^2)$$



con r raggio del parallelo passante per il punto considerato e U definito dalla :

$$[9] \quad U = \int_0^{\varphi} \frac{\varrho}{r} d\varphi$$

con φ latitudine geografica e ϱ raggio di curvatura della sezione meridiana.

Il quadrato dell'elemento lineare della superficie subbiuttiva π è invece rappresentato dalla :

$$[10] \quad dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

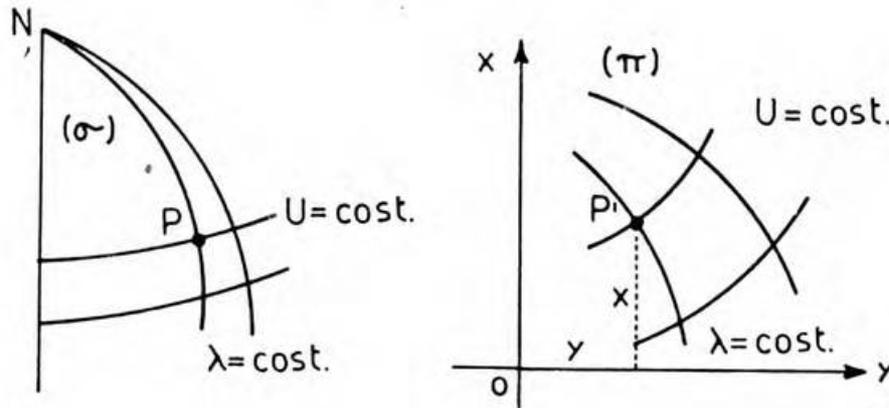


Fig. 2.

Le equazioni di corrispondenza fra le coordinate piane x, y dei punti P' di π e quelle ellissoidiche U, λ dei punti omologhi P di σ sono in generale date dalle funzioni :

$$[11] \quad x = x(U, \lambda) \quad y = y(U, \lambda)$$

continue con tutte le loro derivate successive che si considerano.

Poichè la rappresentazione di σ su π si ritiene conforme, così le [11] devono soddisfare la :

$$x \pm iy = f(U + i\lambda).$$

Ogni arco g di geodetica di σ trova su π un corrispondente arco l di curva che chiameremo arco di curva trasformata della geodetica per rappresentazione conforme o più semplicemente *trasformata*. Potremo così associare ad ogni triangolo geodetico $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ di σ il triangolo $P'_h P'_{h+1} P'_{h+2}$ curvilineo trasformato piano corrispondente su π . Tali triangoli hanno gli angoli omologhi eguali ed il rapporto fra gli elementi lineari infinitesimi dei lati del triangolo curvilineo (dl) e del triangolo geodetico (dg) è indipendente dalla direzione (azimut) degli elementi infinitesimi dg . Indicando con m tale rapporto (modulo di deformazione lineare) si ha simbolicamente :

$$[12] \quad m = \frac{dl}{dg}$$

Le coordinate curvilinee :

$$U = \text{cost.}, \quad \lambda = \text{cost.}$$



individuano su π due congruenze fra loro ortogonali che rappresentano rispettivamente le trasformate dei paralleli e dei meridiani.

L'angolo ϵ che la tangente in P' alla curva $\lambda = \text{cost.}$ forma con la parallela all'asse delle x chiamasi *convergenza del meridiano* in P' . Esso si valuta mediante la :

$$[13] \quad \text{tang } \epsilon = \frac{dx}{dy} - \frac{dx}{d\lambda} : \frac{dy}{d\lambda}$$

introducendo le [11].

Una volta determinata la *tang* ϵ si potrà esplicitare ϵ ricordando la :

$$[14] \quad \epsilon = \sum_s \frac{(-1)^s}{1 + 2^s} \text{tang}^{1+2^s} \epsilon .$$

Tenendo conto delle forme [8], [10] e la [13], la [12] assume la espressione equivalente:

$$[15] \quad m = \frac{1}{r} \frac{dy}{d\lambda} \sec \epsilon$$

e ponendo in questa, come è lecito, per qualunque tipo di rappresentazione cartografica, a meno di termini di ordine superiore :

$$[16] \quad \begin{cases} y = \lambda'' \text{arc } \tau'' \cdot N \cos \varphi + \dots \\ \epsilon'' = \lambda'' \text{sen } \varphi + \dots \end{cases}$$

con N gran normale ellissoidica alla latitudine φ e ricordando la :

$$[17] \quad \sec \epsilon = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} + \dots$$

la [15] si riduce alla :

$$[18] \quad m = 1 + \frac{y^2}{2N} + \dots$$

Surrogando la [18] nella [12] ed integrando si ottiene il seguente valore di m_h valevole per elementi finiti :

$$[19] \quad m_h = \frac{h}{g_h} = 1 + \frac{y_{2h+1}^2 + y_{h+1} y_{h+2} + y_{2h+2}^2}{6 N_m^2} + \dots$$

con N_m gran normale computata alla latitudine media $\frac{\varphi_{h+1} + \varphi_{h+2}}{2}$.

La [19] è molto importante; essa assieme ai concetti fin qui esposti ci dice che :

La risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico dipende da quella del corrispondente triangolo piano curvilineo trasformato. Gli angoli omologhi dei due triangoli sono eguali, mentre

i lati del triangolo curvilineo piano si ottengono dai lati del triangolo geodetico aumentandoli dell'importo:

$$[20] \quad g_h = \frac{y^2_{h+1} + y_{h+1}y_{h+2} + y^2_{h+2}}{6N^2_m}$$

dove le y vanno calcolate per la seconda delle [11]. Reciprocamente: i lati del triangolo geodetico si ottengono dai corrispondenti lati del triangolo curvilineo togliendo a questi la quantità:

$$[21] \quad l_h = \frac{y^2_{h+1} + y_{h+1}y_{h+2} + y^2_{h+2}}{6N^2_m}$$

Poichè i lati l_h sono legati ai lati a_h del triangolo delle corde per mezzo delle [1], così nelle [19] e [21] potremo sostituire ad l_h l'equivalente:

$$[22] \quad l_h = a_h \left\{ 1 + X_h + \dots \right\}$$

ed avremo: la risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico si può far dipendere da quello piano delle corde del triangolo delle trasformate.

Nel caso particolare che ci siamo messi, di triangoli ellissoidici terrestri, la curvatura γ dell'arco della trasformata è dato dalla formula di Schols (7):

$$[23] \quad \gamma = -\frac{y \cos \alpha}{N^2}$$

dove α indica l'angolo di direzione della corda $P'_{h+1} P'_{h+2}$ definito da una delle tre seguenti relazioni:

$$[24] \quad \text{tang } \alpha = \frac{y_{h+2} - y_{h+1}}{x_{h+2} - x_{h+1}} \quad a_h = \frac{y_{h+2} - y_{h+1}}{\text{sen } \alpha} = \frac{x_{h+2} - x_{h+1}}{\text{cos } \alpha}$$

L' X_h definita dalla [2'] è almeno del secondo ordine, perciò tenendo conto della [22] e della [23] si ha:

$$[25] \quad X_h \approx \frac{1}{24} \frac{y^2}{N^2_m} - a^2$$

e imponendo la condizione generalmente ammessa in Geodesia:

$$[26] \quad X_h < 1 \cdot 10^{-6}$$

per un lato a di 100 km, risulta che il punto M di mezzo del lato $P'_{h+1} P'_{h+2}$ non deve essere dall'asse delle x ad una distanza y maggiore di 2000 km, limite questo ampiamente con-

(7) Vedi: Testo Tecnico dell' I. G. M. *Sulla rappresentazione conforme di Gauss* alla pag. 30. (II edizione 1943).



tenuto nelle ordinarie rappresentazioni conformi dei vari Stati, quindi, con le condizioni poste la [22] viene sostituita dalla :

$$[27] \quad l_h = a_h$$

e si può concludere così: *ai fini geodetici è possibile sostituire alle lunghezze dei lati curvilinei delle trasformate le lunghezze delle corrispondenti corde rettilinee.*

Per le riduzioni angolari β definite dalle [8''] osserviamo che, introducendo nella [23] la seconda delle [24] onde eliminare il $\cos \alpha$, si ottiene :

$$[28] \quad \gamma_c = \frac{y_c (x_{h+1} - x_h)}{N_c^2} \cdot \frac{1}{a_{h+2}}$$

e da questa ricavando le derivate intrinseche: prima, seconda e terza della curvatura e sostituendo i risultati nelle [4''] si perviene alla :

$$[29] \quad \beta_{h+1, h+2} = \frac{1}{2} \gamma_c a_{h+2} - \frac{1}{720} \gamma_c^3 a_{h+2}^3$$

Non considerando il secondo addendo, ai fini geodetici, perchè di ordine superiore, si constata che con sufficiente approssimazione per la riduzione β può essere considerata la

$$[30] \quad \beta_{h+1, h+2} = \frac{1}{2} \gamma_c a_{h+2}$$

od anche, poichè :

$$[31] \quad y_c = \frac{2 y_h + y_{h+1}}{3}$$

e per la [28] :

$$[32] \quad \beta''_{h+1, h+2} = - \frac{(x_{h+1} - x_h) (2 y_h + y_{h+1})}{\sigma N_c^2 \arccos r''}$$

All' N_c^2 si può sostituire il quadrato del raggio della sfera locale $q_m N_m$ calcolato per una latitudine media corrispondente a un punto qualunque del campo in cui è compreso il triangolo; si ottiene con ciò :

$$[33] \quad \beta''_{h+1, h+2} = \frac{(x_h - x_{h+1}) (2 y_h + y_{h+1})}{6 q_m N_m \arccos r''}$$

dalla quale si vede che scambiando fra loro gli indici $h, h+1$ della riduzione β'' , questa cambia di valore e di segno. $\beta_{h+1, h+2}$ risulta nullo nei seguenti casi :

- a) $x_h = x_{h+1}$
- b) $2 y_h = - y_{h+1}$

I ragionamenti esposti ci permettono di concludere quanto segue :

La risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico dipende dalla risoluzione del triangolo delle corde del corrispondente triangolo curvilineo ottenuto per rappresentazione conforme ed i

cui angoli provengono dagli angoli del triangolo geodetico apportandovi le riduzioni angolari δ_h definite dalle :

$$[34] \quad \delta_h - \beta_{h \cdot h+1} + \beta_{h \cdot h+2} = \left\{ (x_h - x_{h+1}) (2 y_h + y_{h+1}) + \right. \\ \left. + (x_h - x_{h+2}) (2 y_h + y_{h+2}) \right\} \cdot \frac{1}{6 Q_m N_m \text{arc } 1''}$$

e reciprocamente ; mentre i lati sono legati dalle :

$$[35] \quad a_h = g_h \left(1 + \frac{y_{h+1}^2 + y_{h+1} y_{h+2} + y_{h+2}^2}{6 Q_m N_m} \right)$$

e dalle reciproche :

$$[36] \quad g_h = a_h \left(1 - \frac{y_{h+1}^2 + y_{h+1} y_{h+2} + y_{h+2}^2}{6 Q_m N_m} \right)$$

Di più è facile provare, entro i limiti delle approssimazioni geografiche, che : *le aeree dei due triangoli : geodetico ellissoidico e delle corde, risultano eguali e che l'eccesso sferico del triangolo geodetico è dato dalla somma :*

$$[37] \quad \delta_h + \delta_{h+1} + \delta_{h+2} .$$

In particolare, assegnato il triangolo geodetico per esempio, per mezzo delle coordinate geografiche dei vertici, con le formule di corrispondenza [11] si determineranno le coordinate cartesiane dei vertici del triangolo delle corde ; indi per mezzo delle [3] le riduzioni angolari δ_h e per mezzo delle [19] i moduli di deformazione lineari m_h . Risolto allora il triangolo piano con le coordinate dei vertici, per le formule [36] e [6] si avranno tutti gli elementi del triangolo geodetico ellissoidico.

I procedimenti analitici esposti sono molto importanti e vengono resi assai spediti quando si ha l'avvertenza di costruire opportune tavole numeriche – una volta stabilito il tipo di rappresentazione conforme – atte a facilitare i calcoli indicati dai secondi membri delle [11] opportunamente sviluppati in serie ⁽⁸⁾ e i coefficienti messi in evidenza nelle formule che forniscono le quantità δ_h e m_h .

La rapidità con la quale vengono eseguiti i calcoli incide non lievemente sulla spesa dei calcolatori, sì che il loro impiego è raccomandabilissimo agli Uffici Topografici, Geodetici e Cartografici, che per i loro lavori devono risolvere centinaia e centinaia di triangoli geodetici.

Con i procedimenti indicati tutti i problemi della Geodesia ellissoidica dipendono dalla risoluzione dei triangoli piani rettilinei ⁽⁹⁾, compresi i problemi concernenti le compensazioni delle reti trigonometriche quando sono imposti vincoli speciali (orientamento e mutua posizione fra due o più basi) ⁽¹⁰⁾. Le formule esposte valgono per i massimi triangoli geodetici finora costruiti ⁽¹¹⁾.

⁽⁸⁾ BOAGA G. – *Sviluppi in serie delle formule della rappresentazione conforme dell'ellissoide terrestre sul piano*. Bollettino Geodetico dell' I. G. M. su Rivista « L' Universo », anno 1943.

⁽⁹⁾ MENESTRINA M. – *Confronto fra le determinazioni delle coordinate geografiche dei vertici di una rete di primo ordine eseguito col procedimento classico e con le formule della rappresentazione piana di Gauss*. Boll. Geodetico dell' I. G. M. in Rivista « L' Universo » anno 1942.

⁽¹⁰⁾ Cnfr. Verbali della Reale Commissione Geodetica Italiana, Milano 1943. Allegato I (Sottocommissione per la triangolazione).

⁽¹¹⁾ BOAGA G. – *Sul problema inverso del trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di geodetica sull'ellissoide terrestre*. Bollettino Geodetico dell' I. G. M. su Rivista « L' Universo », anno 1943.



I concetti applicativi esposti non sono però nuovi nel campo geodetico in quanto tentativi del genere sono stati fatti, limitatamente al campo topografico, dallo Stato Maggiore dell'Armata Francese per le reti trigonometriche coloniali⁽¹²⁾. M. H. Roussilhe nel 1922 in un rapporto presentato alla Assemblea della Unione Geodetica e Geofisica Internazionale⁽¹³⁾ espose le formule atte alla risoluzione dei triangoli geodetici attraverso la rappresentazione stereografica dell'ellissoide sul piano.

Per la rappresentazione conforme di Gauss-Krüger abbiamo il noto procedimento esposto da Krüger⁽¹⁴⁾ e modificato dallo scrivente⁽¹⁵⁾ in modo da ottenere formule semplici (adatte all'impiego dei logaritmi e della macchina calcolatrice), attualmente adottate dall'I. G. M. italiano, anche per il calcolo della triangolazione di primo ordine.

La grande triangolazione russa, osservata tra il 1928 ed il 1933, costituita da 756 triangoli di primo ordine è stata pure calcolata con questi procedimenti (Gauss-Krüger). Epperò le formule che abbiamo stabilito in questa Nota e le considerazioni dedotte valgono per qualunque tipo di rappresentazione conforme e gli studi ricordati si possono considerare derivati come altrettanti casi particolari del procedimento generale esposto, poggiato essenzialmente sugli sviluppi analitico-geometrici della Scuola italiana.

Prof. GIOVANNI BOAGA
Geodeta Capo dell' I. G. M.

(12) LABORDE C. - *Traité des projections des cartes géographiques*, fasc. IV, pag. 382.

SCHOLS C. M. - *Sur l'emploi de la projection de Mercatore pour le calcul d'une triangulation dans les voisinage de l'équator* (1885 E. P. de Delf).

(13) ROUSSILHE M. H. - *Emploi des cordonnées rectangulaires stéréographiques pour le calcul de la triangulation dans un rayon de 560 kilomètres autour de l'origine*. U. G. G. I. Paris, 1922.

(14) KRUGER L. - *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene* - Veröffentlichung des Königl. Preuss. Geodätischen Institut n° 52, Verlag von G. B. Teubner Leipzig, 1912. Vedi anche: TARDI P., *Etude d'un système de projection de Gauss en fuseaux de 6° d'amplitude pouvant d'appliquer a l'ensemble du continent africain*. Travaux de l'Association de Géodésie de l'U. G. G. I., tome 14, 1938.

(15) Vedi: Testo Tecnico ricordato nella nota (7).

