PRINCIPII DELLA TEORIA GEOIDICA DI JANKOWSKI E LORO ESTENSIONI

Più volte nei congressi geodetici internazionali sono stati emessi voti perchè i vari Stati avessero ad adottare come superficie di riferimento per le misure geodetiche un unico ellissoide rotazionale. Ma se anche tutti gli Stati aderissero a questi voti, le varie triangolazioni appoggiate su differenti orientamenti, non risulterebbero riferite ad una superficie con variazione continua della curvatura, ma bensì ad una superficie in un certo senso poliedrica, le cui facce sarebbero altrettante porzioni di ellissoide, di medesimi parametri, ognuna tangente al geoide nel punto di propagazione della relativa rete geodetica e diversamente orientata. Per ovviare a questo inconveniente che conduce a rappresentare tutta la terra su una superficie poliedrica, sarebbe necessario non solo che tutti gli Stati adottassero medesime dimensioni per l'ellissoide di riferimento, ma che tutti gli Stati avessero ad adottare un *unico ellissoide per dimensioni e posizione*.

Tale ellissoide, per esempio, potrebbe essere quello col centro di figura coincidente col centro di gravità del corpo terrestre e con l'asse minore lungo l'asse di rotazione del pianeta ; questo come posizione. Mentre le dimensioni potrebbero essere quelle dell'ellissoide internazionale.

In relazione a ciò si potrebbe istituire una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'ellissoide e quelli della superficie equipotenziale passante per i punti medi del livello del mare (geoide, Listing, 1872). I punti omologhi delle due superficie potrebbero, per esempio, essere caratterizzati dall'avere la medesima latitudine geocentrica ψ, così i punti di una superficie verrebbero ottenuti con la proiezione centrografica dei punti corrispondenti dell'altra superficie.

Ciò ammesso, alle misure astronomico-geodetiche e gravimetriche eseguite sulla superficie fisica della terra, e ridotte al livello del mare (geoide), si dovrebbero apportare convenienti riduzioni per trasportarle sul punto omologo dell'ellissoide di riferimento, e viceversa, per le grandezze ottenute dal calcolo sull'ellissoide, per riportarle al geoide.

Per stabilire tali riduzioni si dovrebbe considerare, come sarà dimostrato in seguito, la superficie equipotenziale come superficie ellissoidale a schiacciamento α_g variabile, pur mantenendo inalterate le dimensioni dei semiassi equatoriale (a) e polare (b), eguali a quelle assunte per l'ellissoide di riferimento.

In questo ordine di idee la letteratura geodetica segnala un pregevole lavoro del geodeta polacco Ksawery Jankowski, dal titolo «*Sur les deformations du géoïde*», edito nel 1927 dall' Istituto Meteorologico di Varsavia. In esso sono indicate con brevi cenni di dimostrazione o addirittura senza dimostrazioni, le formule per le riduzioni accennate onde ridurre i risultati delle misure geoidiche all'ellissoide di riferimento.

Ritenendo importante il lavoro di Jankowski, ci proponiamo in questa Nota di presentare i risultati da lui ottenuti facendoli precedere dalle relative dimostrazioni, correggendo qualche suo risultato, estendendo alcune sue formule e completando la esposizione con nuove considerazioni.

Nello svolgimento dei vari argomenti le formule segnate con asterisco sono state pubblicate da Jankowski, mentre quelle senza asterisco sono o formule già note in geodesia, o loro trasformazioni.

1. – Con riferimento al sistema spaziale di coordinate polari, con l'origine nel centro del pianeta e con il suo asse coincidente con quello di rotazione, la *equazione di una superficie equipotenziale* e quindi anche quella del *geoide* è:

$$W = \varepsilon \int_{\tau} \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi \tag{1}$$

ove l' integrale va considerato esteso a tutto il corpo terrestre τ, ω è la velocità angolare, r il raggio vettore ed ε la costante di gravitazione universale.

Svolgendo in serie l' inverso della distanza messa in evidenza nella (1) ed integrando termine a termine, a meno di contributi di ordine superiore, si ottiene la:

$$W = \varepsilon \frac{M}{r} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{T}{M r^2} \left(\frac{1}{3} - \operatorname{sen}^2 \psi \right) + \frac{\omega^2 r^2}{2 \varepsilon M} \cos^2 \psi \right\} \tag{2}$$

con M la massa dell' intero corpo terrestre e T differenza dei momenti principali di inerzia intorno agli assi equatoriale e polare.

Il secondo membro della (2) mette in evidenza che la superficie equipotenziale, superficie di rotazione (sferoide), è simmetrica rispetto al piano equatoriale [1].

Ponendo nella (2) a al posto di r, fatta eccezione per il primo fattore, e risolvendo la stessa rispetto ad r, con opportuni artifici di calcolo, si giunge alla seguente espressione per il raggio r_g del geoide alla latitudine ψ:

$$r_g = a \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \operatorname{sen}^2 \psi + \frac{1}{2} \alpha^2 \operatorname{sen}^4 \psi \right\} \tag{3}$$

limitatamente alla seconda potenza dello schiacciamento α dell'ellissoide di riferimento, espresso con gli elementi meccanici dalla:

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{T}{M a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2 \varepsilon M} \text{ [2]}. \tag{4}$$

Dall'equazione della sezione meridiana dell'ellissoide di riferimento in coordinate cartesiane:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

---

[1] In seguito diremo, come del resto si dimostra in geodesia superiore, che il geoide si abbassa sotto i continenti e si innalza sugli oceani, e poichè i continenti occupano in gran parte l'emisfero australe, così il geoide risulta dissimmetrico rispetto al piano equatoriale. Per questo fatto IVANOV nella sua teoria « *Théorie de la précession* » aggiunge al secondo membro della (2) il termine λ (sen ψ — 5/3 sen^3 ψ) con λ costante (= — 0,0158 cm).

[2] Per la determinazione delle formule (1, (2) e (3) e la posizione (4) vedansi, per esempio, le mie *Lezioni di elementi di geodesia e topografia*, parte I, cap. I. *L'equazione del geoide*, ecc., edite dalla Cedam. Padova, anno 1942 e 1944.

ponendo:

$$x = r_e \cos\psi \qquad\qquad z = r_e \,\text{sen}\,\psi$$

eliminando il semi asse polare b per mezzo della:

$$\alpha = (a - b) : a \tag{5}$$

e ricavando r_e, con opportuni sviluppi in serie, si giunge alla:

$$r_e = a \left\{ 1 - \left(\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2\right)\text{sen}^2\psi + \frac{3}{2}\alpha^2\,\text{sen}^4\psi \right\}. \tag{6}$$

Desiderando assegnare alla espressione (3), che fornisce il raggio vettore del geoide, una forma identica alla (6), che produce il raggio vettore dell' ellissoide di riferimento, cioè volendo porre:

$$r_g = a \left\{ 1 - \left(\alpha_g + \frac{3}{2}\alpha_g^2\right)\text{sen}^2\psi + \frac{3}{2}\alpha_g^2\,\text{sen}^4\psi \right\} \tag{7}$$

si dovrà determinare l' α_g che permette tale sostituzione. Ciò si ottiene eguagliando i secondi membri delle (3) e (7); operando in questo senso, si ricava facilmente la:

$$\alpha_g + \frac{3}{2}\alpha_g^2 = \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\cos^2\psi$$

e ponendo nel secondo addendo del primo membro $\alpha_g = \alpha$ il che è lecito trascurando le potenze terze di α, come sono state trascurate nella determinazione delle (3) e (6), si trae:

$$\alpha_g = \alpha - \alpha^2\cos^2\psi \tag{8)*}$$

definita da Jankowski *schiacciamento del geoide*.

Esso varia dall'equatore al polo, assumendo in questi due estremi valori minimo e massimo rispettivamente. Al polo esso si identifica allo schiacciamento dell'ellissoide, mentre per le altre latitudini assume valori sempre inferiori.

Si giunge alla (7) anche eliminando α dalla (3) e dalla (8).

Con la (6) e (7), tenuto conto della (8) possiamo concludere:

L'equazione del tipo (6) rappresenta il geoide quando α si ritiene variabile, e l'ellissoide quando α è costante.

Dall'esame delle (6) e (7) risulta ancora:

Entro certi limiti la superficie del geoide si può considerare come superficie dell'ellissoide e conseguentemente il geoide non può coincidere per tutta la sua estensione ad un solo ellissoide osculatore.

Per la (5) lo schiacciamento ellissoidico è rappresentato da una frazione propria $1/v$ perciò la (6), con la stessa approssimazione, può essere messa sotto la forma:

$$\alpha_g = 1 : (v + \cos^2\psi) \tag{8'}$$

assai comoda per mettere in evidenza le variazioni dello schiacciamento α_g con la latitudine. Si hanno così i seguenti importi:

$\psi = 0^0$	$\alpha_g = 1 : (v + 1{,}000)$
$\pm 10^0$	$1 : (v + 0{,}970)$
$\pm 20^0$	$1 : (v + 0{,}884)$
$\pm 30^0$	$1 : (v + 0{,}750)$
$\pm 40^0$	$1 : (v + 0{,}587)$
$\pm 50^0$	$1 : (v + 0{,}480)$
$\pm 60^0$	$1 : (v + 0{,}250)$
$\pm 70^0$	$1 : (v + 0{,}117)$
$\pm 80^0$	$1 : (v + 0{,}030)$
$\pm 90^0$	$1 : (v + 0{,}000)$ [1]

i quali ci dicono che: *non è indifferente eseguire triangolazioni geodetiche a varie latitudini per la determinazione dello schiacciamento dell'ellissoide di riferimento*, come è stato del resto provato dai grandi lavori geodetici eseguiti a latitudini diverse.

2. – Indicando con φ la latitudine ellissoidica cioè l'angolo che la normale all'ellissoide forma col piano equatoriale, la lunghezza dell'arco di meridiano ellissoidico compreso fra le latitudini φ_1, φ_2 è dato dalla:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho \, d\varphi = a\,(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-3/2} \, d\varphi$$

con e^2 quadrato della eccentricità dell'ellissoide. Svolgendo in serie la funzione integranda ed effettuando la integrazione fino ai termini in e^4 si trova:

$$S = a \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4\right) \Delta\varphi'' \operatorname{arc} 1'' - \right. \tag{9}$$

$$\left. - \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{16} e^4\right) \operatorname{sen} \Delta\varphi \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{15}{128} e^4 \operatorname{sen} 2\Delta\varphi \cos 2(\varphi_1 + \varphi_2) \right\}$$

con:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \,.$$

Jankowski pone in questa $e^2 = 2\alpha$ e differenzia il secondo membro rispetto ad α pervenendo alla seguente espressione che fornisce *la variazione della lunghezza di un arco di meridiano per una variazione $\Delta\alpha$ dello schiacciamento*:

$$\Delta S = -1/2\, a \left\{ (1 + 3/4\,\alpha)\, \Delta\varphi'' \operatorname{arc} 1'' + 3\,(1 + \alpha) \operatorname{sen} \Delta\varphi \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right. \tag{10*}$$

$$\left. - 15/8\, \alpha \operatorname{sen} 2\Delta\varphi \cos 2(\varphi_1 + \varphi_2) \right\} \Delta\alpha \,.$$

---

[1] Assunto $\alpha = 1/297$ (ellissoide internazionale) dalla formula (8') risulta che dal polo all'equatore l'α_g varia da $1/297$ a $1/298$.

Osserviamo a questo punto che, tenendo conto nella (9) dei termini in e^4 non è lecito assumere per e^2 il valore approssimato 2α, ma deve essere considerata l'espressione esatta:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 .$$

Rinnovando la sostituzione nella (9) e variando i due membri, si perviene alla:

$$(10') \qquad \Delta S = -1/2\,\alpha \left\{ (1 - 1/8\,\alpha)\,\Delta\varphi''\,\mathrm{arc}\,1'' + 3\,\mathrm{sen}\,\Delta\varphi \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 15/8\,\alpha\,\mathrm{sen}\,2\,\Delta\varphi \cos 2\,(\varphi_1 + \varphi_2) \right\} \Delta\alpha$$

che sostituisce la (10) data da Jankowski.

Per la (8) posto:

$$(11)^* \qquad \Delta\alpha = -\alpha^2 \cos^2\varphi$$

la (10') fornisce la seguente espressione per *la lunghezza di un arco di meridiano geoidico*:

$$(12) \qquad S_g = S + \Delta S = (9) + 1/2\,\alpha \left\{ (1 - 1/8\,\alpha)\,\Delta\varphi''\,\mathrm{arc}\,1'' + 3\,\mathrm{sen}\,\Delta\varphi \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - 15/8\,\alpha\,\mathrm{sen}\,2\,\Delta\varphi \cos 2\,(\varphi_1 + \varphi_2) \right\} \alpha^2 \cos^2\varphi$$

dove φ va computato all'origine.

Dalla (12) scende: *la misura di un arco di meridiano geoidico dipende dalla posizione del punto di partenza e quindi dalla direzione.*

Con le dimensioni dell'ellissoide internazionale:

$$a = 6378388 \text{ m} \qquad \alpha = 1/297$$

e ponendo:

$$\varphi_1 = 50^0 , \qquad \Delta\varphi = 1^0,$$

si trae:

$$S_g = S + 0{,}115 \text{ m}$$

e ponendo invece:

$$\varphi_1 = 51^0 , \qquad \Delta\varphi = 1^0 :$$

$$S_g = S + 0{,}110 \text{ m}\ (^1) .$$

Per ovviare a questo inconveniente si deve considerare la latitudine media anzichè quella dell'origine.

I risultati numerici ottenuti ci dicono che *per le latitudini centrali,* 10 *km di arco di meridiano ellittico esigono, per fornire l'arco di meridiano geoidico, una correzione di* 0,01 *m circa, superiore al limite di precisione stabilito per le misure angolari delle triangolazioni di primo ordine.*

---

(1) All'equatore la ΔS assume il valore $+ 2{,}524$ m.

3. – Siano ora P_g, P due punti corrispondenti, il primo sul geoide, il secondo sull'ellissoide. ψ sia la loro latitudine geocentrica. Indicando con φ la latitudine ellissoidica di P, si ha la relazione:

$$\text{tang}\,\psi = (1 - e^2)\,.\,\text{tang}\,\varphi \tag{13}$$

dalla quale:

$$\varphi = \text{arc tang}\left\{\frac{\text{tang}\,\psi}{1 - e^2}\right\}. \tag{14}$$

Ponendo in questa la limitazione approssimata $e^2 = 2\,\alpha$ e variando i due membri rispetto ad α, dopo di aver sostituito nel secondo membro a tang ψ, tang φ, si giunge alla seguente relazione approssimata, data senza dimostrazione dall'Autore:

$$\Delta\,\varphi'' = \text{sen}\,2\,\varphi\,(1 - 2\,\alpha\,\text{sen}^2\,\varphi)\,R''\,.\,\Delta\,\alpha \tag{15*}$$

con:

$$\Delta\,\varphi = \varphi_g - \varphi$$

rappresentando φ_g la latitudine geoidica, ossia l'angolo che la normale al geoide staccata dal punto P_g forma col piano equatoriale.

Tenendo conto invece anche dei termini in α^2 per la (14), si giunge alla seguente relazione maggiormente approssimata:

$$\Delta\,\varphi'' = \text{sen}\,2\,\varphi\,\left\{1 + \alpha - 5\,\alpha^2 - (2\,\alpha + 5\,\alpha^2)\,\text{sen}^2\,\varphi + 4\,\alpha^2\,\text{sen}^4\,\varphi\right\}R''\,.\,\Delta\,\alpha\,. \tag{15'}$$

Dalla (15') non si può dedurre la (15), trascurando α^2, perchè la (15') fu ottenuta sostituendo nel secondo membro, dopo aver eseguita la differenziazione, alla tang ψ la espressione (13), mentre per la determinazione della (15) si pose per tang ψ, tang φ.

La (15) o (15') ci dice che: *conoscendo la latitudine astronomica sul geoide, non si può ritenere il medesimo valore per la latitudine sull'ellissoide di riferimento. Per il passaggio dalla* φ_g *alla* φ *per punti corrispondenti o reciprocamente, è necessario tener conto della correzione* $\Delta\,\varphi''$. Simbolicamente dunque:

$$\varphi = \varphi_g - \Delta\,\varphi''\,. \tag{15''}$$

Ponendo nella (15) la (8), si ottiene:

$$\Delta\,\varphi'' = -\,\text{sen}\,2\,\varphi\,(1 - 4\,\alpha\,\text{sen}^2\,\varphi)\,R''\,\alpha^2\cos^2\varphi \tag{16}$$

ed una analoga per la (15'). Queste si annullano per $\varphi = 0^o$ e $\varphi = 90^o$, cioè al polo ed all'equatore.

Per latitudini centrali e per i seguenti schiacciamenti ellissoidici 1/295, 1/296, 1/297 essa assume ordinatamente i seguenti importi:

$\varphi = 45^o$	1'', 19	1'', 19	1'', 18
55^o	0 , 74	0 , 73	0 , 73
65^o	0 , 41	0 , 41	0 , 41

assai maggiori degli errori medi che si ottengono nelle determinazioni astronomiche di latitudine (per esempio col metodo di Horrebow-Talcott).

Ne risulta allora che della correzione anzidetta si deve tener conto anche per il calcolo delle componenti meridiane della deviazione della verticale.

Si osservi adesso che passando alle tangenti ambo i membri della (15'') e svolgendo in serie il secondo membro si ottiene:

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \varphi_g - \frac{\Delta \varphi''}{R'' \cos^2 \varphi_g}$$

e per la (13) la:

$$\operatorname{tang} \psi = \left(\operatorname{tang} \varphi_g - \frac{\Delta \varphi''}{R'' \cos^2 \varphi_g} \right) (1 - \alpha)^2$$

che *permette il passaggio dalla latitudine geoidica alla latitudine geocentrica.*

4. – Nei lavori geodetici è uso ridurre tutte le osservazioni al livello marino (geoide) ritenendo questa superficie come superficie dell'ellissoide di riferimento. Ora in base alle cose dette, non si può ritenere in generale il geoide coincidente all'ellissoide di riferimento sicchè le coordinate geografiche φ, λ, A calcolate sull' ellissoide per ridurle alla superficie geoidica, esigono certe correzioni in relazione alla variazione dello schiacciamento secondo la (8) nel passaggio da una superficie all'altra.

Se dal punto (φ, λ) di propagazione delle coordinate geografiche sull'ellissoide di riferimento si stacca un arco di geodetica di lunghezza s e di azimut A, le coordinate φ_1 λ_1 dell'altro estremo di geodetica ed il rispettivo azimut A_1, si calcolano con le note serie accorciate di Legendre, che sono qui riportate limitatamente ai termini di secondo ordine:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{s \cos A}{\varrho} - \frac{s^2 \operatorname{tang} \varphi}{2 \varrho N} \left(\operatorname{sen}^2 A + \frac{3 e^2 \cos^2 \varphi \cos A}{1 - e^2} \right) + \ldots$$

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{s \operatorname{sen} A}{N \cos \varphi} + \frac{s^2 \operatorname{tang} \varphi \operatorname{sen} 2 A}{2 N^2 \cos \varphi} + \ldots$$

$$A_1 = A + \frac{s \operatorname{tang} \varphi \operatorname{sen} A}{N} + \frac{s^2 \operatorname{sen} A \cos A}{2 N} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{2 \operatorname{tang}^2 \varphi}{N} \right) + \ldots$$

Le coordinate di tale estremo e l'azimut riferito alla superficie geoidica, saranno date dalle:

$$\begin{aligned} \varphi_g &= \varphi_1 + \Delta \varphi_g \\ \lambda_g &= \lambda_1 + \Delta \lambda_g \\ A_g &= A_1 + \Delta \alpha_g \end{aligned}$$

dove le Δ si possono ricavare dalle serie di Legendre variando lo schiacciamento secondo la (8).

Ponendo per brevità:

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi \qquad\qquad \Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda$$

e considerando i soli termini di primo ordine, variando rispetto lo schiacciamento, dopo aver limitato gli sviluppi in serie delle curvature principali ellissoidiche alla prima potenza dello schiacciamento, cioè dopo aver posto:

$$1/\varrho = 1/a\,(1 + 2\,\alpha - 3\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\varphi + \ldots.)$$
$$1/N = 1/a\,(1 - \alpha\,\mathrm{sen}^2\varphi + \ldots.)$$

e tenendo conto della (11) si perviene alle:

$$(17)^{*} \quad \begin{cases} \Delta\varphi_g = -\Delta\varphi\,(2 - 5\,\mathrm{sen}^2\varphi + 3\,\mathrm{sen}^4\varphi)\,.\,\alpha^2 \\ \Delta\lambda_g = 1/4\,\Delta\lambda\,.\,\mathrm{sen}^2\,2\,\varphi\,.\,\alpha^2 \\ \Delta A_g = \Delta\lambda_g\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

di cui le prime due sono date da Jankowski.

La prima delle (17) si annulla al polo ed al parallelo $54^{\circ}\,44'$ circa; le altre due si annullano al polo ed all'equatore.

I valori massimi per le correzioni (17) con le rispettive latitudini sono riassunti nello specchio seguente:

$$(\Delta\,\varphi_g)\,\max = -0'',082 \qquad \varphi = 65^{\circ}\,55'$$
$$(\Delta\,\lambda_g)\,\max = +0\;\;,010 \qquad \varphi = 45^{\circ}$$
$$(\Delta A_g)\,\max = +0\;\;,008 \qquad \varphi = 49^{\circ}\,12'$$

essi sono stati calcolati con le dimensioni dell'ellissoide internazionale.

Particolare interesse presenta il $(\Delta\varphi_g)_{\max}$ *che risulta di importo maggiore dell'errore medio che si consegue nella determinazione astronomica della latitudine.*

Desiderando con le (17) assicurare l'importo $0'',01$, la $\Delta\varphi$ dovrà essere compresa nell'intervallo $-15'$, $+15'$ e la $\Delta\lambda$ nell'intervallo -1°, $+1^{\circ}$. Campi di validità maggiori si otterranno considerando più termini negli sviluppi di Legendre; così considerando anche i termini del secondo ordine e ripetendo le differenziazioni, si ottengono le seguenti correzioni valevoli per campi -3°, $+3^{\circ}$ in latitudine ed in longitudine, e che si possono ritenere come una generalizzazione delle (17) date da Jankowski:

$$(18) \quad \begin{cases} \Delta\varphi_g = -\Delta\varphi\,(2 - 5\,\mathrm{sen}^2\varphi + 3\,\mathrm{sen}^4\varphi)\,.\,\alpha^2 + \\ \qquad + 1/2\,\mathrm{sen}\,2\,\varphi \left\{ \Delta\lambda^2\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2\,\mathrm{sen}^4\varphi) + 3\,\Delta\varphi^2\,.\,\cos^2\varphi \right\} \alpha^2 \\ \Delta\lambda_g = 1/4\,\Delta\lambda\,\mathrm{sen}^2\,2\,\varphi\,.\,\alpha^2 + \Delta\lambda\,.\,\Delta\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,2\,\varphi\,\alpha^2 \\ \Delta A_g = 1/4\,\Delta\lambda\,\mathrm{sen}^2\,2\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\alpha^2 - \Delta\lambda\,\Delta\varphi\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi + 4\,\mathrm{sen}^4\varphi)\cos\varphi\,\alpha^2\,. \end{cases}$$

Per il triangolo rettangolo ellissoidico, limitato all'arco di geodetica s dal meridiano e dalla geodetica ad esso normale, passante rispettivamente per gli estremi della geodetica, l'eccesso sferico E è dato dalla:

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{s^2\,\mathrm{sen}\,A\,\cos A}{\varrho\,N}$$

e con lo stesso ordine di approssimazione fin qui tenuto, potremo scrivere:

$$E = \frac{1}{2}\,\Delta\varphi\,\Delta\lambda\cos\varphi \quad .$$

Introducendo questa espressione negli ultimi termini delle ultime due formule della terna (18), si hanno le:

$$\Delta \lambda_g = 1/4 \, \Delta \lambda \, \text{sen}^2 \, 2\varphi \, . \, \alpha^2 + 4 E \, \text{sen}^3 \varphi \, . \, \alpha^2$$
$$\Delta A_g = 1/4 \, \Delta \lambda \, \text{sen}^2 \, 2\varphi \, . \, \text{sen} \, \varphi \, . \, \alpha^2 - 2 E \, (1 - 3 \, \text{sen}^2 \varphi + 4 \, \text{sen}^4 \varphi) \, . \, \alpha^2 \, .$$

Col metodo indicato si possono estendere gli sviluppi fino a considerare campi sempre maggiori per le $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$. Tuttavia le formule (17) possono essere utilizzate per calcolare le correzioni durante i trasporti, punto per punto, delle coordinate ellissoidiche lungo gli archi di geodetica delle triangolazioni fondamentali, per ridurle dall'ellissoide al geoide.

(*Continua*).

Prof. GIOVANNI BOAGA
Geodeta Capo dell' I. G. M.