

SULLA RAPPRESENTAZIONE DELLA SFERA SUL PIANO

SECONDO I PRINCIPII GAUSSIANI

I. — GENERALITÀ.

È stata messa in luce, or non è molto, l'utilità della rappresentazione piana gaussiana dell'ellissoide di rotazione per la risoluzione di numerosi problemi concernenti i triangoli geodetici (¹). Allo scopo di particolarizzare, nel caso della superficie sferica, le proprietà ivi trovate, riteniamo utile, anche dal punto di vista didattico, ricavare le formule relative alla rappresentazione in discorso, quantunque esse si possano derivare con facilità dalle formule allora stabilite, ponendo eguale a zero l'eccentricità che in esse figura.

La rappresentazione piana conforme gaussiana della sfera per carte a grande scala avviene, come per l'ellissoide, per fusi meridiani di limitata ampiezza (generalmente 3°). Nel-

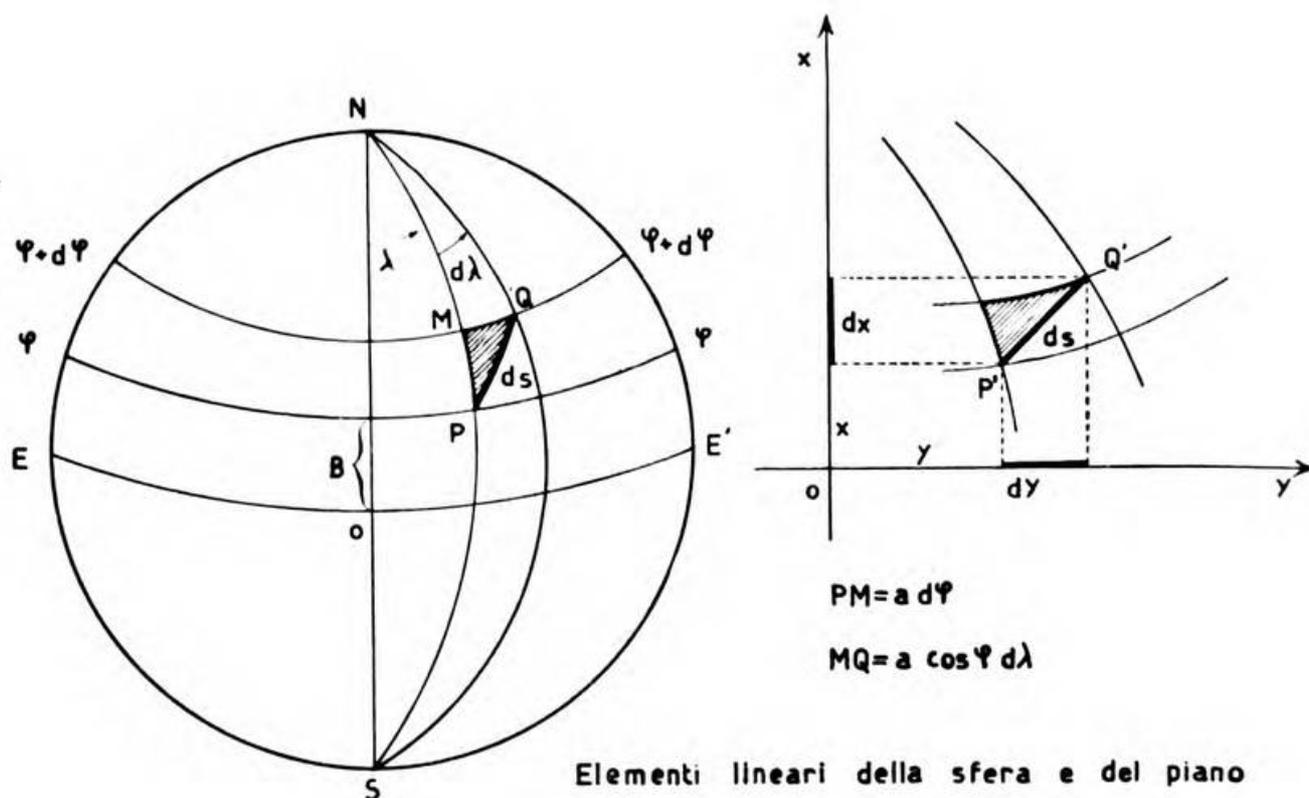


Fig. 1

l'intento di stabilire le *formule di corrispondenza*, ossia le relazioni intercedenti fra le coordinate geografiche (latitudine φ e longitudine λ) dei punti del fuso considerato e le coordinate

(¹) Cfr. Collezione dei testi tecnici dell' I. G. M. : - « Sulla rappresentazione conforme di Gauss » ed i suoi allegati, anno 1941-42 XX e M. MENESTRINA : - « Confronto fra le determinazioni delle coordinate geografiche dei vertici di una rete di primo ordine eseguite col procedimento classico e con le formule della rappresentazione piana di Gauss » in Boll. Geodetico dell' I. G. M. anno II, f. 8 ; G. BOAGA : - « Sul problema inverso del trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di geodetica dell' ellissoide terrestre », Ibidem, anno III, f. 2.

piane (x, y) dei corrispondenti punti del piano, ricordiamo che i quadrati degli elementi lineari omologhi $d S^2$, $d s^2$ della superficie sferica e del piano sono rappresentati dalle:

$$[1] \quad d S^2 = a^2 (d \varphi^2 + \cos^2 \varphi \cdot d \lambda^2), \quad d s^2 = d x^2 + d y^2$$

con a raggio della sfera.

Ponendo:

$$[2] \quad d q = d \varphi / \cos \varphi$$

il quadrato dell'elemento lineare della sfera assume la *forma isometrica*:

$$[3] \quad d S^2 = a^2 \cos^2 \varphi (d q^2 + d \lambda^2).$$

Ne consegue per il quadrato del modulo m di deformazione lineare la:

$$[4] \quad m^2 = d s^2 / d S^2$$

dove m , desiderando la rappresentazione conforme, deve intendersi variabile da punto a punto, ma per ogni punto invariante rispetto alle infinite direzioni uscenti dal punto stesso; ciò equivale a dire che m deve intendersi soltanto funzione del punto.

2 - LE EQUAZIONI DELLA CARTA.

Dalle teorie della rappresentazione conforme e delle funzioni di variabili complesse, perchè le condizioni poste per m siano verificate, scende che fra le coordinate q , λ e x , y abbia luogo la relazione:

$$[5] \quad f(q + i \lambda) = x \pm i y$$

con i unità immaginaria ed f simbolo di funzione analitica. Sviluppando in serie di Taylor il primo membro della [5], assumendo come incremento il numero immaginario $i \lambda$, con λ espresso in radianti ed eguagliando le parti reali e quelle immaginarie dei due membri, si giunge alle seguenti serie fondamentali, che rappresentano le *formule di corrispondenza o equazione della carta* del tipo $x = x(q, \lambda)$, $y = y(q, \lambda)$:

$$[6] \quad \begin{cases} x = B - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 B}{d q^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 B}{d q^4} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6 B}{d q^6} + \dots \\ y = \lambda \frac{d B}{d q} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 B}{d q^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5 B}{d^5 q} + \dots \end{cases}$$

Esse sono rapidamente convergenti. Con Gauss ammettiamo che B rappresenti la lunghezza del meridiano origine ($\lambda = 0$) a partire dall'equatore fino alla latitudine φ .

Dalle [5] e [6] si ha con ciò:

$$[7] \quad x \Big|_{\lambda = 0} = f(q) = B.$$



La rappresentazione in esame adunque oltre a conservare gli angoli (rappresentazione conforme) sviluppa senza alterazioni sull'asse x il meridiano centrale del fuso sferico (rappresentazione gaussiana).

Poichè dalla [2] risulta :

$$\frac{d\varphi}{dq} = \cos \varphi$$

ed essendo :

$$B = a \cdot \varphi$$

con φ espresso in radianti, si ha dapprima :

$$\frac{dB}{dq} = \frac{dB}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = a \cdot \cos \varphi$$

e successivamente :

$$\frac{d^2 B}{dq^2} = -a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = a \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi)$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = -a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (1 - 6 \cos^2 \varphi)$$

$$\frac{d^5 B}{dq^5} = a \cos \varphi (1 - 20 \cos^2 \varphi + 24 \cos^4 \varphi)$$

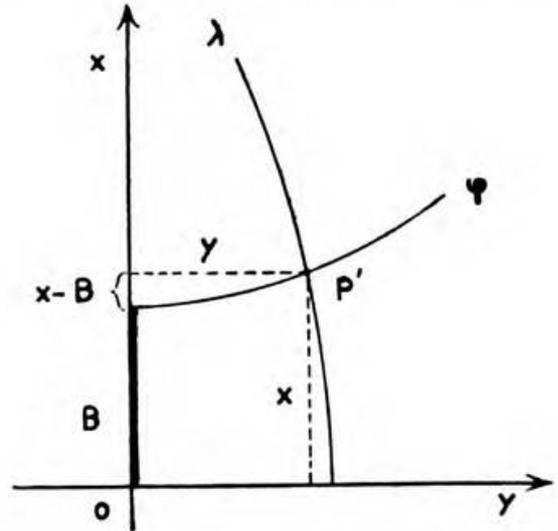
$$\frac{d^6 B}{dq^6} = -a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (1 - 60 \cos^2 \varphi + 120 \cos^4 \varphi) .$$

Introducendo queste nelle [6], esprimendo λ in secondi sessagesimali e posto :

$$\operatorname{arco} 1'' = 1 / R''$$

si perviene alle seguenti formule atte al passaggio dalle coordinate geografiche alle coordinate piane rettangolari di Gauss :

$$[8] \left\{ \begin{aligned} x &= a \cdot \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda''}{R''} \right)^2 a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \frac{1}{24} \left(\frac{\lambda''}{R''} \right)^4 a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (1 - 6 \cos^2 \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{720} \left(\frac{\lambda''}{R''} \right)^6 a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (1 - 60 \cos^2 \varphi + 120 \cos^4 \varphi) + \dots \\ y &= \frac{\lambda''}{R''} a \cos \varphi - \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda''}{R''} \right)^3 a \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{120} \left(\frac{\lambda''}{R''} \right)^5 a \cos \varphi (1 - 20 \cos^2 \varphi + 24 \cos^4 \varphi) + \dots \end{aligned} \right.$$



Coordinate ortogonali piane di P'; rappresentazione del parallelo e del meridiano passante per P'.

Fig. 2



Queste formule sono utili quando i calcoli vengono eseguiti con la macchina calcolatrice. Esse risultano di facile impiego se si ha l'avvertenza di metterle sotto le forme :

$$[9] \quad \begin{cases} x = A_0 + A_2 \lambda''^2 + A_4 \lambda''^4 + A_6 \lambda''^6 + \dots \\ y = A_1 \lambda'' + A_3 \lambda''^3 + A_5 \lambda''^5 + \dots \end{cases}$$

con A_i quantità facilmente tabulabili e le cui espressioni si ottengono confrontando le [8] con le [9].

L' A_0 è dato dalla :

$$A_0 = \frac{a \cdot \pi}{180^0} \cdot \varphi^0 = \frac{a}{57^0, 2957795} \cdot \varphi^0$$

ove la latitudine va espressa in gradi sessagesimali.

Desiderando dare alle [8] forme idonee al calcolo logaritmico basterà trasportare, nella prima formula, $a \varphi$ nel primo membro, mettere in evidenza in entrambe i fattori comuni, indi passare ai logaritmi neperiani i due membri delle due espressioni avendo cura però di svolgere in serie i polinomi che figurano nei secondi membri, tenendo conto a questo riguardo dello sviluppo :

$$\ln (1 + \alpha x + \beta y + \dots) = \alpha x + \beta y - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \dots$$

dove x e y sono rispettivamente quantità del primo e del secondo ordine legate alle costanti α, β dalla $|\alpha x + \beta y| < 1$ e moltiplicare i risultati ottenuti per $\mu = 0,434\ 294\ 481$, *modulo dei logaritmi neperiani*, e ciò allo scopo di utilizzare i logaritmi decimali.

Effettuando queste operazioni si perviene alle :

$$[10] \quad \begin{cases} \log (x - a \varphi) = 2 \log \lambda'' + T_0 + T_2 + T_4 + \dots \\ \log y = \log \lambda'' + T_1 + T_3 + T_5 + \dots \end{cases}$$

dove :

$$T_0 = \log \frac{a \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2 R''^2}, \quad T_2 = \lambda''^2 \cdot C_2 \quad T_4 = \lambda''^4 \cdot C_4, \quad \dots\dots$$

con :

$$C_2 = \frac{\mu (6 \cos^2 \varphi - 1)}{12 R''^2}, \quad C_4 = \frac{\mu (300 \cos^4 \varphi - 180 \cos^2 \varphi - 1)}{1440 R''^4}, \quad \dots\dots$$

e :

$$T_1 = \log \frac{a \cos \varphi}{R''}, \quad T_3 = y''^2 \cdot C_3 \quad T_5 = \lambda''^4 \cdot C_5, \quad \dots\dots$$

con :

$$C_3 = \frac{\mu (2 \cos^2 \varphi - 1)}{6 R''^2} \quad C_5 = \frac{\mu (26 \cos^4 \varphi - 20 \cos^2 \varphi - 1)}{180 R''^4}, \quad \dots\dots$$



Le quantità $T_0, T_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \dots$ sono facilmente tabulabili e si consiglia la loro tabulazione di r' in r' . Le prime due quantità dipendono dalle dimensioni della superficie sferica, i coefficienti C_i invece risultano indipendenti dal raggio della sfera.

Circa i coefficienti C_i osserviamo che essi sono funzioni razionali intere rispetto il $\cos \varphi$; all'equatore assumono valori positivi, al polo valori negativi. In particolare poi i coefficienti C_4 e C_5 non danno contributi apprezzabili se si considerano fusi dell'ampiezza di 3° o 4° sicchè, adoperando nei calcoli sette cifre decimali logaritmiche, si può nell'uso pratico limitare le serie dei secondi membri delle [10] ai primi tre addendi e adoperare le formule accorciate:

$$\begin{cases} \log(x - a\varphi) = 2 \log \lambda'' + T_0 + \lambda''^2 \cdot C_2 \\ \log y = \log \lambda'' + T_1 + \lambda''^2 \cdot C_3 \end{cases}$$

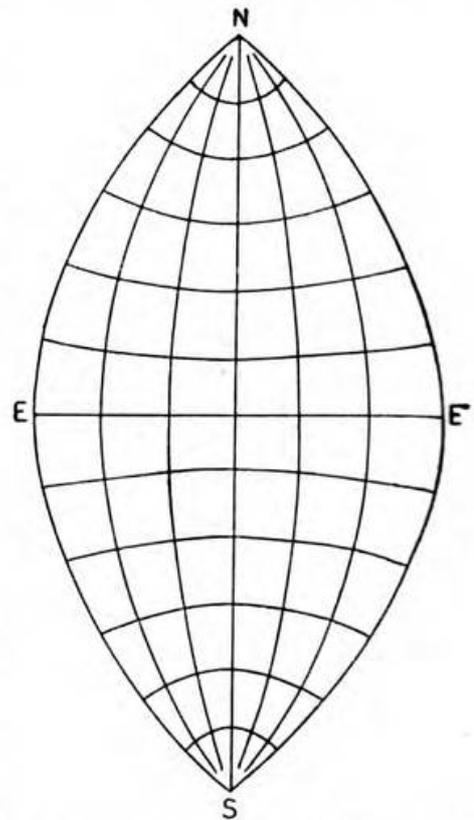
3. - IL RETICOLATO GEOGRAFICO.

Ritenendo φ costante e λ variabile con continuità nell'ambito del fuso le [8] rappresentano le equazioni parametriche dei paralleli sul piano gaussiano. Dalla forma analitica delle [8] stesse risulta che essi sono caratterizzati da archi di curve simmetrici rispetto l'asse delle x , convessi verso l'origine delle coordinate, molto prossimi ad archi parabolici ed aventi i centri (punti di intersezione con l'asse delle x) equidistanti, quando si considera φ variabile dall'equatore al polo in progressione aritmetica. Dalle [8] si trae ancora: $x = 0$ per $\varphi = 0$, e quindi l'equatore è rappresentato dall'asse delle y .

Analogamente, ritenendo λ costante e φ variabile con continuità, si ottengono le equazioni parametriche dei meridiani. Essi risultano formati da un fascio di traiettorie ortogonali agli archi rappresentanti i paralleli, simmetriche rispetto l'asse delle y , con le concavità rivolte verso l'asse delle x e passanti per i punti di ascisse $x = \pm \frac{1}{2} \pi a$ sull'asse delle x (poli della sfera). Per $\lambda = 0$ si ha l'asse delle x . Per λ variabile in progressione aritmetica gli archi dei corrispondenti meridiani incontrano l'asse delle y ortogonalmente e a distanze successive fra loro sempre maggiori. Risulta così di facile costruzione il reticolato geografico del fuso sul piano gaussiano.

Quando la regione che si vuol rappresentare supera in longitudine tre gradi allora la rappresentazione vien fatta con più fusi adiacenti, su ognuno dei quali valgono i principii esposti.

Se l'ampiezza del fuso anzichè di 3° o 6° come si usa per la costruzione di carte al 5 000, 10 000, 25 000, 50 000, 100 000, è di 180° e 360° , allora sul piano si può effettuare la rappresentazione di un emisfero e di tutta la superficie sferica. Anche in questi casi però il reticolato conserva le caratteristiche elencate; le



Indicazione schematica del reticolato di un fuso

Fig. 3

serie [8] devono però essere prolungate fino alla approssimazione che si vuol raggiungere.

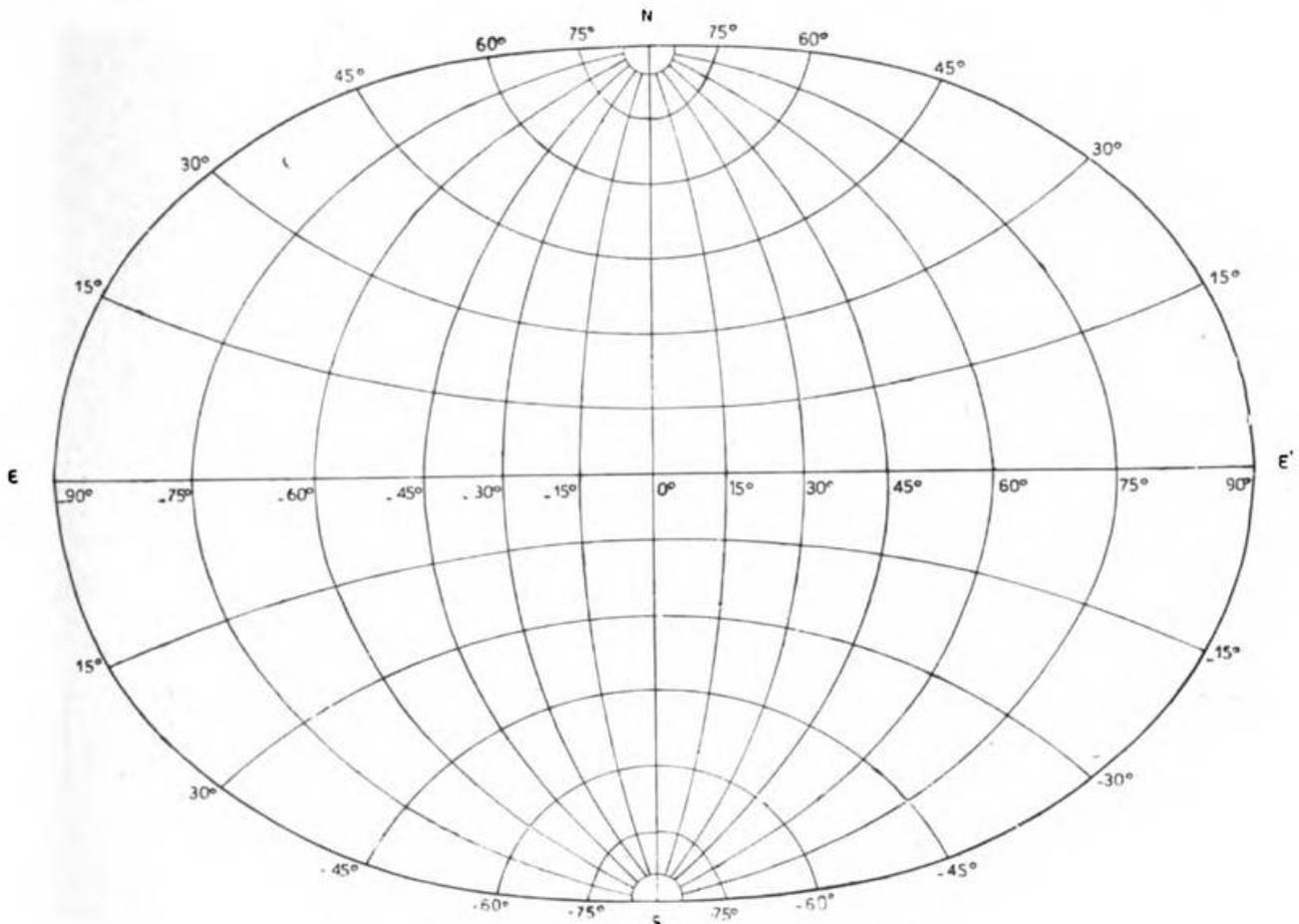


Fig. 4

4. - SUL PASSAGGIO DALLE COORDINATE PIANE GAUSSIANE ALLE COORDINATE GEOGRAFICHE.

La determinazione delle formule atte a questo passaggio può essere fatta ancora con procedimento simile a quello del paragrafo 2 considerando la funzione inversa della [8] :

$$q + i\lambda = f(x + iy)$$

indi svolgendo in serie di Taylor assumendo iy come incremento, ecc. Si viene così ad ottenere la latitudine isometrica q ; si rende necessario allora un nuovo passaggio per la determinazione di φ e la costruzione di nuove tabelle.

Volendo utilizzare le tabelle numeriche eventualmente costruite per il problema di cui al capo 2, si potrà ricorrere al *metodo delle approssimazioni successive*. A tale uopo fissiamo l'attenzione sulle formule [10]. Un primo valore approssimato della latitudine sarà il seguente :

$$\varphi_1 = \frac{x}{a}$$

Con questo valore si calcolerà il T_1 del secondo membro della seconda equazione dalla quale avremo un primo valore approssimato di y'' :

$$\log y_1'' = \log y - T_1 \Big|_{\varphi = \varphi_1}$$



Introducendo nel secondo membro della prima i valori φ_1, λ_1 ottenuti dalla prima approssimazione avremo, risolvendo la prima delle [10] rispetto a φ , il valore φ_2 (seconda approssimazione); indi dalla seconda equazione il valore λ_2'' :

$$\log \lambda_2'' = \log y - T_1 \Big|_{\varphi = \varphi_2} + y''_1{}^2 \cdot C_3 \Big|_{\varphi = \varphi_2}$$

Successivamente introducendo nella prima φ_2 e λ_2'' si perverrà al valore φ_3 e conseguentemente al valore λ_3'' e così di seguito finchè si trova $\varphi_n = \varphi_{n-1}$. In pratica due o tre passaggi sono sufficienti.

5. - SULLA CONVERGENZA DEI MERIDIANI.

Per ogni punto P' di coordinate x, y della porzione di piano gaussiano, corrispondente al fuso sferico considerato, si intersecano due curve fra loro ortogonali (v. capo 3) di cui una rappresenta il parallelo e l'altra il meridiano passanti per il punto omologo P della sfera di coordinate φ, λ .

Conducendo per P' le parallele agli assi di riferimento e le tangenti a queste due curve, risultano eguali per note proprietà di geometria elementare gli angoli γ formati dalle tangenti e dalle parallele agli assi cartesiani. L'angolo γ , che può essere determinato dalla:

$$[11] \quad \text{tang } \gamma = \frac{dx}{dy}$$

chiamasi *convergenza del meridiano nel punto P'* .

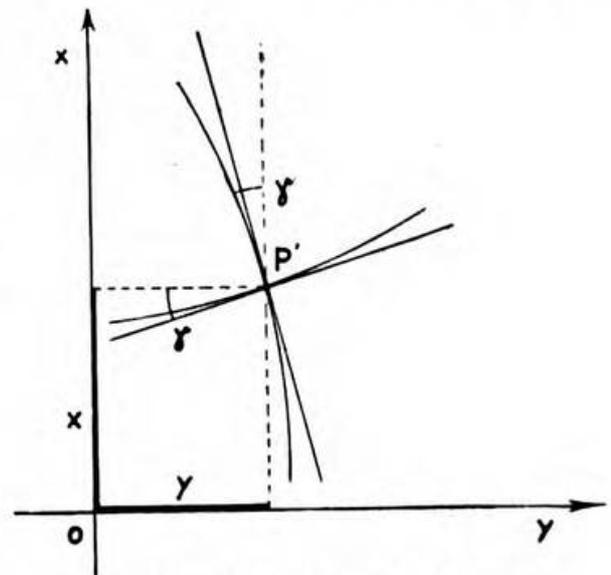
Come è stato detto al capo 3 le curve dei paralleli sono rappresentate dalle [8] o dalle formole da loro derivate ritenendo φ costante; così l'angolo γ fra la parallela all'asse delle y e la tangente alla curva del parallelo passante per P' , in base alla [11], potrà ricavarsi dalla equivalente:

$$[12] \quad \text{tang } \gamma = \frac{dx}{d\lambda} : \frac{dy}{d\lambda}$$

Si viene in tal modo a ricondurre il problema della determinazione della convergenza dei meridiani a quello algebrico della determinazione delle derivate rispetto a λ delle [8] dove φ si ritiene costante. Effettuando le derivazioni si hanno le:

$$\frac{dx}{d\lambda} = a \lambda \text{ sen } \varphi \cos \varphi \left\{ 1 - \frac{1}{6} \lambda^2 (1 - 6 \cos^2 \varphi) + \dots \right\}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = a \cos \varphi \left\{ 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \dots \right\}$$



Convergenza dei meridiani

Fig. 5



Inoltre :

$$\frac{\frac{1}{dy}}{\frac{1}{d\lambda}} = \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \dots \right\}$$

Introducendo questi risultati nella [12], effettuando i prodotti, limitando gli sviluppi ai termini in λ^3 si ha tosto :

$$[13] \quad \text{tang } \gamma = \lambda \text{ sen } \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} + \dots \right)$$

e poichè, come è noto dalla teoria delle serie :

$$\gamma = \text{tang } \gamma - \frac{1}{3} \text{tang}^3 \gamma + \dots$$

si ricava, tenendo conto della [13], col medesimo ordine di approssimazione :

$$[14] \quad \gamma = \lambda \text{ sen } \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi + \dots \right)$$

e passando ai logaritmi ed esprimendo λ e γ in secondi sessagesimali di arco :

$$[15] \quad \log \gamma'' = \log \lambda'' + \log \text{sen } \varphi + T_6$$

con

$$[16] \quad T_6 = \gamma''^2 \cdot C_6$$

e

$$[17] \quad C_6 = \frac{1}{3} \frac{\mu}{R''^2} \cos^2 \varphi$$

Le formule [14] e [15] risolvono il problema della *determinazione della convergenza dei meridiani in funzione delle coordinate geografiche di P.*

Se, all' incontro, fossero note quelle piane x , y di P' allora, anzichè ricorrere a formule dirette che si potrebbero stabilire ma che risulterebbero assai complicate, sarebbe conveniente dal punto di vista pratico determinare prima le corrispondenti φ e λ con le [8] o derivate secondo quanto è stato esposto al capo 4, indi applicare la [14] o [15].

Osserviamo infine che anche il coefficiente C_6 ora introdotto è indipendente dalla superficie sferica.

6. - SULLA DEFORMAZIONE LINEARE.

Ponendo come è lecito in base a noti principii di analisi :

$$[18] \quad \frac{dx}{dy} = \cot \alpha' \quad \frac{dq}{d\lambda} = \cot \alpha$$



ne consegue le :

$$[19] \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha'} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha'}$$

$$[20] \quad 1 + \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \quad 1 + \left(\frac{d\lambda}{dq}\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

onde ne risulta tenendo conto delle [4], [3] e [1] del capo 1 e mettendo in evidenza prima dy^2 al numeratore e $d\lambda^2$ al denominatore, poi dx^2 al numeratore e $d\varphi^2$ al denominatore, tenendo altresì conto delle [19] e [20] :

$$[21] \quad m = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \alpha'} \cdot \frac{dy}{d\lambda} = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{a \operatorname{cos} \alpha'} \cdot \frac{dx}{d\varphi}$$

Poichè x introdotta con le [18] indica l'azimut della direzione dell'elemento lineare dS della superficie sferica, così posto $\varphi = \text{costante}$, $\alpha = 90^\circ$, risulterà sul piano gaussiano :

$$\alpha' = 90^\circ - \gamma$$

e conseguentemente, per la prima delle [21], lungo un parallelo avremo :

$$[22] \quad m_\varphi = \frac{1}{a \operatorname{cos} \varphi} \cdot \sec \gamma \cdot \frac{dy}{d\lambda}$$

In modo analogo, poichè lungo il meridiano $\lambda = \text{costante}$, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha' = \gamma$, avremo, dalla seconda delle [21] :

$$[22]' \quad m_\lambda = \frac{1}{a} \cdot \sec \gamma \cdot \frac{dx}{d\varphi}$$

La $\frac{dy}{d\lambda}$ è già stata ottenuta al capo 5 ; introducendola nella [22], con la medesima limitazione, si ottiene :

$$m_\varphi = \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{2} (1 - 2 \operatorname{cos}^2 \varphi) + \dots \right\} \sec \gamma$$

poichè con sviluppo in serie :

$$\sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \dots$$

surrogando in questa a γ il valore approssimato che si trae dalla [14] :

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi + \dots$$

avremo :

$$[23] \quad m_\varphi = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{cos}^2 \varphi + \dots$$



Dalla prima delle [8] scende subito la :

$$\frac{dx}{d\varphi} = a \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{2} (1 - 2 \cos^2 \varphi) + \dots \right\}$$

per cui introducendola nella [22]' e tenendo conto dell'osservazione fatta per $\sec \varphi$ si ha la :

$$[23]' \quad m_\lambda = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi + \dots$$

Confrontando le [23] e [23]' si conclude che : *le deformazioni lineari lungo il parallelo e lungo il meridiano risultano eguali e quindi la deformazione è la stessa lungo qualsiasi direzione spiccata dal punto che si considera individuato dalle due coordinate φ, λ . Questo risultato del resto è rispondente alla teoria generale delle rappresentazioni conformi.*

Il modulo di deformazione lineare dunque, per una qualsiasi direzione uscente dal punto φ, λ è dato dalla :

$$[24] \quad m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi + \dots$$

oppure, passando ai logaritmi :

$$[25] \quad \log m = y''^2 \cdot C_7 + \dots$$

con :

$$[26] \quad C_7 = \frac{\mu}{2 R''^2} \cos^2 \varphi$$

Anche C_7 è indipendente dalle dimensioni della sfera di riferimento.

Dalla [24] per $\varphi = 0^\circ$ e $\varphi = 90^\circ$ risultano i seguenti valori per i moduli di deformazione lineare equatoriale e polare :

$$m_e = 1 + \frac{\lambda^2}{2} + \dots \quad m_p = 1$$

il secondo dei quali ci dice che al polo si ha *l'eguaglianza degli elementi lineari omologhi del piano e della sfera ; mentre il primo valore ci indica che esso aumenta coll'aumentare della sua distanza dall'asse del fuso.*

Dalla seconda delle [8] esprimendo in λ radianti si ha :

$$[27] \quad y = a \lambda \cos \varphi + \dots$$

Introducendo nella [24] il valore di y che si ricava dalla [27] si perviene alla nota formula approssimata :

$$[28] \quad m = 1 + \frac{y^2}{2 a^2} + \dots$$



e conseguentemente a quella logaritmica :

$$[29] \quad \log m = C_8 \cdot y^2 + \dots$$

con :

$$C_8 = \frac{\mu}{2 a^2}$$

Le formule [24] o [25] e [28] o [29] sono da utilizzare quando si considerano *elementi infinitesimi* uscenti da P e da P' ossia quando si ha in base alla [4] del capo 1 e della [28] :

$$[30] \quad dS = ds / m = \left(1 - \frac{2 a^2}{y^2} + \dots\right) ds$$

Per *elementi finiti* S e s corrispondenti alle lunghezze degli elementi omologhi PQ , arco di cerchio massimo e $P'Q'$ sua trasformata piana, di coordinate estreme x_1, y_1 e x_2, y_2 , si dovrà integrare la [30] e scrivere :

$$[31] \quad S = s - \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2}{2 a^2} ds + \dots$$

Poichè, indicando con α' l'angolo di direzione dell'elemento ds della trasformata, si ha :

$$ds = \frac{dy}{\text{sen } \alpha'}$$

così la [31] diviene :

$$S = s - \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{2 a^2 \text{sen } \alpha'} + \dots$$

ed effettuando la integrazione :

$$[32] \quad S = s - \frac{y_2^3 - y_1^3}{6 a^2 \text{sen } \alpha'} + \dots$$

Indicando con ϵ l'angolo che la corda forma con la tangente in P' alla trasformata $P'Q'$ e con s' , la lunghezza della corda $P'Q'$, avremo :

$$s' = \frac{y_2 - y_1}{\text{sen } (\alpha' + \epsilon)}$$

od anche, a meno di termini di terzo ordine, assimilando la lunghezza s della trasformata alla lunghezza s' della corda ⁽¹⁾ e trascurando il piccolissimo angolo ϵ , la precedente fornisce la :

$$s = \frac{y_2 - y_1}{\text{sen } \alpha'}$$

(1) Cfr. testo tecnico citato alla pag. 43.



che introdotta nella [32] onde eliminare $\text{sen } \alpha'$, dà la nota relazione :

$$S = s \left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 a^2} + \dots \right)$$

dalla quale risulta per lunghezze finite :

$$[33] \quad m = s / S = 1 + F + \dots$$

con :

$$F = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 a^2}$$

Osserviamo che posto :

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0$$

la frazione F assume la nuova forma :

$$F = \frac{y_1^2 + 4 y_0^2 + y_2^2}{12 a^2}$$

ossia :

$$F = \frac{y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2}{12 a^2}$$

Volendo si potrà dare a tale frazione anche la espressione equivalente :

$$F = \frac{(y_1 + y_2)^2}{8 a^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{24 a^2}$$

Le ultime tre forme date alla F possono tornare utili nei calcoli numerici quando si disponga di tavole contenenti i quadrati dei numeri.

Nel caso particolare infine in cui i due punti $P' Q'$ abbiano eguali le y dalla [33] risulta :

$$m = 1 + \frac{y^2}{2 a^2} + \dots$$

che coincide con la [28] nel consueto ordine di approssimazione.

Passando ai logaritmi la [33] si ha :

$$[34] \quad \log m = \mu \cdot F + \dots = (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \cdot C_9$$

con :

$$[35] \quad C_9 = \frac{\mu}{6 a^2}$$



7. - IL MODULO DI DEFORMAZIONE SUPERFICIALE.

Dalla teoria delle rappresentazioni cartografiche conformi è noto che il *modulo η di deformazione areolare* è eguale al quadrato del modulo di deformazione lineare sicchè, nel consueto ordine di approssimazione, si ha :

$$[36] \quad \eta = 1 + 2 \cdot F + \dots$$

od anche passando ai logaritmi :

$$[37] \quad \log \eta = 2 \mu F + \dots = (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) C_{10} + \dots$$

con :

$$[38] \quad C_{10} = \frac{\mu}{3 a^2}$$

8. - SULLA RIDUZIONE ANGOLARE.

Consideriamo ora due punti P e Q della sfera ed il cerchio massimo passante per essi e inoltre supponiamo P sul meridiano centrale del fuso e l'arco del cerchio massimo PQ compreso nel fuso. L'angolo che l'arco PQ forma col meridiano in P è l'*azimut α* già considerato nel capo 6. L'estremo P' della trasformata $P'Q'$ è sull'asse delle x e l'*angolo di direzione, α'* di essa differisce dall'angolo α di un angolo ε denominato *riduzione angolare* in quanto in base alla :

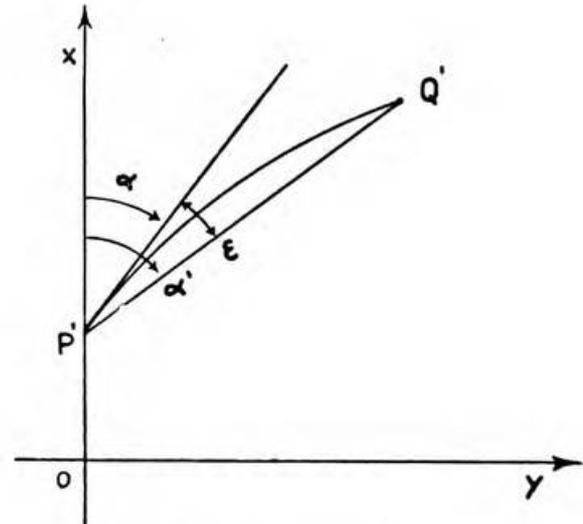
$$\alpha = \alpha' - \varepsilon$$

è possibile passare da α' a α o reciprocamente.

Se il punto P' non è sull'asse delle x allora fra l'azimut α in P e l'angolo di direzione α' in P' intercede la relazione affatto generale :

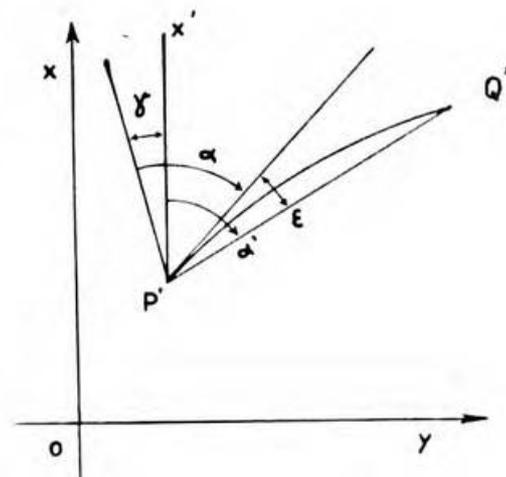
$$[39] \quad \alpha = \alpha' + \gamma - \varepsilon$$

Come risulta dalla teoria delle rappresentazioni cartografiche con riferimento agli studi di M. Schols e J. Laborde, ecc.,⁽¹⁾ la



Riduzione angolare
(punto P' sull'asse del fuso)
 $\alpha = \alpha' - \varepsilon$

Fig. 6



Riduzione angolare
(punto P' fuori dell'asse del fuso)
 $\alpha = \alpha' + \gamma - \varepsilon$

Fig. 7

(1) Cfr. M. SCHOLS: - *La courbure de la projection de la ligne géodésique* (Annales de l'Ecole polytechnique de Delf, Vol. de l'année 1886).

J. LABORDE: - *Traité des projections des cartes géographiques*, fasc. IV, pag. 37, anno 1932.
Testo tecnico dell' I. G. M. già citato.



deviazione angolare espressa in secondi sessagesimali risulta data dalla seguente formula generale :

$$[40] \quad \epsilon_{12}'' = \frac{R'' (x_2 - x_1) (2 y_1 + y_2)}{6 a^2}$$

con x_1, y_1 e x_2, y_2 rispettivamente coordinate dei punti $P' Q'$. Il segno della ϵ'' dipende dalla differenza $x_2 - x_1$ e dalla somma $2 y_1 + y_2$.

Passando ai logaritmi la [40] si ha pure :

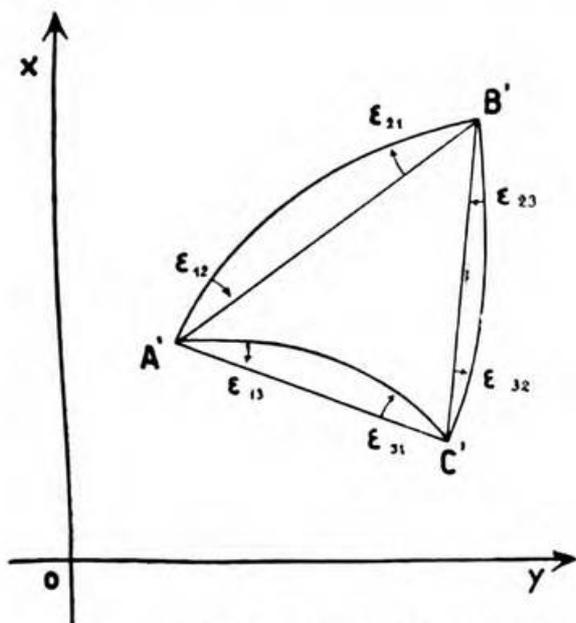
$$[41] \quad \log \epsilon_{12}'' = \log (x_2 - x_1) + \log (2 y_1 + y_2) + \log \frac{R''}{6 a^2}$$

di cui l'ultimo addendo è costante e può essere determinato una volta per tutte.

Dalla [40] risulta infine che l' ϵ'' non gode della proprietà commutativa rispetto i suoi indici, fatta eccezione per i casi in cui : $y_1 = y_2$ oppure $x_1 = x_2$.

9. - SULLA RISOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO PER MEZZO DEGLI ELEMENTI DEL TRIANGOLO DELLE CORDE DELLE TRASFORMATE.

Si abbia sulla sfera e nel campo del fuso un triangolo $A B C$ limitato da archi di cerchi massimi $A B, B C, C A$. Gli omologhi dei vertici del triangolo sferico, sul piano siano i punti $A' B' C'$ di coordinate $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$ fra i quali corrono le trasformate $A' B', B' C', C' A'$ dei tre lati del triangolo sferico.



Triangolo delle corde

Fig. 8

Gli angoli $A' B' C', C' A' B', B' C' A'$ delle trasformate risultano eguali agli angoli $A B C, C A B, B A C$ del triangolo sferico e ciò perchè la rappresentazione è conforme. Congiungendo con segmenti di retta i vertici $A' B', B' C', C' A'$ si ottiene un triangolo detto *triangolo delle corde delle trasformate* o semplicemente *triangolo delle corde*. Gli angoli determinati dalle corde e dalle tangenti alle trasformate nei singoli vertici sono le riduzioni angolari ϵ introdotte nei capi precedenti. Per ogni triangolo si hanno così le sei riduzioni $\epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{13}, \epsilon_{31}, \epsilon_{23}, \epsilon_{32}$ che si ottengono applicando la [40] che può essere scritta sotto la forma generica :

$$[42] \quad \epsilon_{rs}'' = \frac{R'' (x_s - x_r) (2 y_r + y_s)}{6 a^2}$$

Poichè la rappresentazione è conforme, la somma delle sei riduzioni angolari $\epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{32}$ rappresenta ovviamente l'eccesso sferico del triangolo sferico. Tenendo conto

della [42] ed effettuando tale somma, dopo alcune semplici riduzioni si trova :

$$\frac{1}{2} \left\{ (x_1 - x_3) (y_3 + y_1) + (x_3 - x_2) (y_2 + y_3) + (x_2 - x_1) (y_1 + y_2) \right\} \frac{R''}{a^2}$$

ma, i primi due fattori rappresentano l'area σ del triangolo delle corde, dunque, indicando con E l'eccesso sferico, si ha :

$$E = \frac{\sigma}{a^2} \cdot R''$$

Dalla trigonometria sferica è noto che l'eccesso sferico è dato dalla :

$$E = \frac{\Sigma}{a^2} \cdot R''$$

con Σ area del triangolo sferico.

Confrontando i due risultati :

$$\sigma = \Sigma$$

ossia : l'area del triangolo delle corde eguaglia quella del triangolo sferico.

Gli angoli \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , del triangolo delle corde si ricavano dagli angoli delle trasformate \hat{A}' , \hat{B}' , \hat{C}' (o dagli angoli del triangolo sferico) per mezzo delle :

$$[43] \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{a} = \hat{A}' + \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12} \\ \hat{b} = \hat{B}' + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{23} \\ \hat{c} = \hat{C}' + \varepsilon_{32} - \varepsilon_{31} \end{array} \right.$$

e reciprocamente. Circa il segno delle ε_{rs} si osservi che si può tener conto della seguente regola pratica : computando le ε_{rs} nel senso rotatorio da sinistra a destra, cioè conforme al movimento delle lancette dell'orologio, se nella rotazione si incontra prima l'arco della trasformata e poi la corda, l' ε_{rs} è positivo ; se all'incontro si trova prima la corda e poi la trasformata l' ε_{rs} è negativa. Nella fig. 8 risultano positive le ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} e negative le altre. Questa regola può essere utilizzata quando avute le ε_{rs} dal calcolo si vuol segnare le trasformate.

Se si considera la sfera media terrestre per triangoli sferici estesi nel campo topografico cioè per triangoli con lati inferiori a 20 km le riduzioni angolari risultano di importi inferiori alle possibilità strumentali e quindi si possono ritenerle nulle e confondere gli angoli del triangolo delle corde con quelli del triangolo delle trasformate. Per la limitazione seguita nello svolgimento di tutti gli argomenti esposti nei capi precedenti potremo ritenere anche per triangoli abbastanza grandi le lunghezze delle corde eguali alle lunghezze delle trasformate sicchè, indicando con s_{12} , s_{23} , s_{31} le lunghezze delle corde fra i vertici $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ e con S_{12} , S_{23} , S_{31} quelle degli archi di cerchio massimo AB , BC , CA del triangolo sferico, avremo le seguenti relazioni :

$$[44] \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{12} : S_{12} = m_{12} \\ s_{23} : S_{23} = m_{23} \\ s_{31} : S_{31} = m_{31} \end{array} \right.$$

dove gli m_{rs} vanno calcolati con la [33].



Le [44] permettono dunque il calcolo delle lunghezze degli archi di cerchi massimi del triangolo sferico, per mezzo degli elementi del triangolo piano: lati e coordinate dei vertici.

Note le coordinate piane dei punti A', B', C' mediante le:

$$[45] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } (A' B') = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \text{tang } (A' C') = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \end{array} \right.$$

ecc., si possono determinare gli angoli di direzione $(A' B')$ e $(A' C')$ delle $A' B'$ e $A' C'$, ecc., e con la:

$$[46] \quad \hat{a} = (A' B') - (A' C')$$

se $x_1 > x_2$ o con la:

$$[47] \quad \hat{a} = (A' C') - (A' B')$$

nel caso opposto, ecc., si possono determinare gli angoli del triangolo delle corde.

I lati poi del triangolo delle corde in funzione delle coordinate dei vertici, una volta determinati gli angoli di direzione, si calcolano mediante le note formule della poligonometria:

$$[47] \quad s_{12} = \frac{x_2 - x_1}{\cos (A' B')} = \frac{y_2 - y_1}{\text{sen } (A' B')}$$

ecc., preferibili alle equazioni pitagoriche del tipo:

$$s_{rs} = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2}.$$

Dunque: con le formule via via indicate in questo paragrafo risulta possibile, date le coordinate dei vertici $A' B' C'$, determinare oltre agli elementi del triangolo delle corde tutti gli elementi del triangolo sferico.

Questa deduzione è della massima importanza per gli Uffici topografici in quanto tutti gli elementi dei triangoli sferici possono essere ricavati dagli omologhi elementi dei triangoli delle corde.

Il complesso di formule stabilite risulta inoltre particolarmente utile nella risoluzione del problema: « calcolare la lunghezza dell'arco massimo e del suo azimut in uno degli estremi date che siano le coordinate geografiche degli estremi » ed in quello classico relativo al « trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di cerchio massimo ».

Per il calcolo degli azimut sferici si dovranno calcolare anche le convergenze dei meridiani e tener conto delle [41].

10. - TAVOLE NUMERICHE.

A titolo di esempio onde mettere in evidenza la variazione numerica dei coefficienti C_i via via definiti con le formule ricavate e quelli A_i delle [9] abbiamo ritenuto utile riportare in tabelle i valori di detti parametri calcolati di 5° in 5° dall'equatore al polo. Sono stati pure aggiunti i valori delle lunghezze degli archi di meridiano dall'equatore alla lati-

tudine φ dati dal prodotto $a \cdot \varphi$ (con φ espressa in radianti) ed i valori dei termini T_0 e T_1 che entrano nelle [10]. In tutti questi calcoli si è tenuto conto del seguente valore di a :

$$a = 6\,371\,221,266 \text{ m} \quad [6.8042\,2268\,79]$$

corrispondente al raggio della sfera equivalente all'ellissoide internazionale di Hayford.

Se si dovesse cambiare la superficie sferica e passare da quella di raggio a ad un'altra di raggio a' onde utilizzare le tabelle costruite basterebbe moltiplicare i valori $a\varphi$ ed i coefficienti A_i per il rapporto di riduzione a'/a ed aggiungere ai valori T_0 e T_1 la differenza logaritmica :

$$\log a' - \log a$$

rimanendo immutati, come si disse, per il cambio della superficie di riferimento i coefficienti $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$. I coefficienti C_8, C_9, C_{10} vanno invece moltiplicati per $(a/a')^2$ ed i loro logaritmi corretti della quantità :

$$2 (\log a - \log a').$$

Agli effetti pratici si dovrebbero costruire tabelle analoghe per latitudini comprese nella zona che interessa e variabili di $1'$ in $1'$ riportando pure per i vari parametri A_i C_i le corrispondenti variazioni per $1''$.

Nella costruzione di tali tabelle conviene tenere conto, per opportuni controlli, delle seguenti facili relazioni fra alcuni dei parametri tabulari :

$$\begin{aligned} T_0 &= \log A_2 & T_1 &= \log A_1 \\ \mu A_4 &= A_2 C_2 & \mu A_3 &= A_1 C_3 \\ 2 C_2 - 3 C_3 &= \frac{\mu}{3 R''^2} & C_6 = C_7 &= 2 : 3 \\ & & C_9 : C_{10} : C_8 &= 1 : 2 : 3 \end{aligned}$$

TABELLA I.

φ	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	φ
0^0	—	30,888 554	$\times 10^{-10}$ 000 000	$\times 10^{-15}$ + 121 010	$\times 10^{-20}$ 00 000	$\times 10^{-25}$ + 7 110	$\times 10^{-30}$ + 0 000	0^0
5	555 993,931	30,770 869	065 011	+ 118 717	+ 06 309	+ 6 784	+ 0 595	5
10	1 111 987,862	30,419 357	128 045	+ 111 986	+ 12 086	+ 5 878	+ 1 094	10
15	1 667 981,793	29,836 181	187 190	+ 101 225	+ 16 859	+ 4 440	+ 1 421	15
20	2 223 975,724	29,025 665	240 647	+ 087 103	+ 20 259	+ 2 743	+ 1 536	20
25	2 779 969,655	27,994 605	286 790	+ 070 498	+ 22 003	+ 0 985	+ 1 443	25
30	3 335 963,586	26,750 414	324 224	+ 052 399	+ 22 227	- 0 616	+ 1 169	30
35	3 891 957,517	25,302 359	351 801	+ 033 901	+ 20 855	- 1 880	+ 0 797	35
40	4 447 951,448	23,661 868	368 693	+ 016 092	+ 18 205	- 2 692	+ 0 402	40
45	5 003 945,379	21,841 605	374 380	000 000	+ 14 666	- 3 017	+ 0 057	45
50	5 559 939,310	19,854 854	368 693	- 013 511	+ 10 681	- 2 894	- 0 187	50
55	6 115 933,241	17,717 057	351 801	- 023 737	+ 06 711	- 2 432	- 0 301	55
60	6 671 927,172	15,444 277	324 224	- 030 252	+ 03 175	- 1 778	- 0 323	60
65	7 227 921,103	13,054 121	286 790	- 032 874	+ 00 402	- 1 085	- 0 259	65
70	7 783 915,034	10,564 503	240 647	- 031 703	- 01 405	- 0 492	- 0 162	70
75	8 339 908,965	7,994 576	187 190	- 027 123	- 02 193	- 0 085	- 0 071	75
80	8 895 902,896	5,363 797	128 045	- 019 746	- 02 054	+ 0 103	- 0 014	80
85	9 451 896,827	2,692 246	065 011	- 010 387	- 01 215	+ 0 105	+ 0 005	85
90	10 007 890,758	0,000 000	000 000	000 000	00 000	0 000	0 000	90

TABELLA II.

φ	T_0	T_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
			$\times 10^{-15}$	$\times 10^{-15}$	$\times 10^{-30}$	$\times 10^{-30}$	$\times 10^{-15}$	$\times 10^{-15}$
0°	— ∞	1,489 7986	+ 425,3	+ 170,1	+ 169 229,9	+ 56 884,0	340,3	510,4
5	4,812 9868 — 10	1,488 1398	+ 421,4	+ 167,5	+ 164 717,6	+ 54 142,2	337,7	506,5
10	5,107 3626	1,483 1500	+ 409,9	+ 159,9	+ 151 608,7	+ 46 178,4	330,0	495,0
15	5,272 2826	1,474 7432	+ 391,1	+ 147,3	+ 131 134,7	+ 33 823,2	317,5	476,2
20	5,381 3806	1,462 7822	+ 365,6	+ 130,3	+ 105 198,4	+ 18 350,8	300,5	450,7
25	5,457 5640	1,447 0744	+ 333,2	+ 109,4	+ 076 160,6	+ 01 297,0	279,5	419,2
30	5,510 8452	1,427 3305	+ 297,7	+ 085,1	+ 046 573,8	— 15 643,1	255,2	382,8
35	5,546 2970	1,403 1610	+ 257,4	+ 058,2	+ 018 905,4	— 30 865,3	228,3	342,5
40	5,566 6649	1,374 0491	+ 214,4	+ 029,5	— 004 719,9	— 43 038,4	199,7	299,5
45	5,573 3124	1,339 2845	+ 170,1	000,0	— 022 753,6	— 51 195,6	170,1	255,2
50	5,566 6649	1,297 8667	+ 125,8	— 029,5	— 034 355,1	— 54 881,7	140,6	210,9
55	5,546 2970	1,248 3916	+ 082,8	— 058,2	— 039 460,4	— 54 221,8	111,9	167,9
60	5,510 8452	1,188 7676	+ 042,5	— 085,1	— 038 752,2	— 49 773,5	085,1	127,6
65	5,457 5640	1,115 7476	+ 006,1	— 109,4	— 033 531,7	— 42 583,4	060,8	091,2
70	5,381 3806	1,023 8491	— 025,4	— 130,3	— 025 528,1	— 33 948,4	039,8	059,7
75	5,272 2826	0,902 7954	— 050,9	— 147,3	— 016 655,6	— 25 290,6	022,8	034,2
80	5,107 3626	0,729 4724	— 069,7	— 159,9	— 008 753,0	— 17 964,0	010,3	015,4
85	4,812 9868	0,430 1148	— 081,2	— 167,5	— 003 341,9	— 13 094,7	002,6	003,9
90	— ∞	— ∞	— 085,1	— 170,1	— 001 422,1	— 11 376,8	000,0	000,0

TABELLA III.

φ	$\log C_2$	$\log C_3$	$\log C_4$	$\log C_5$	$\log C_6$	$\log C_7$	φ
0°	2.6286,9—15	2.2307,0—15	5.2284,8—30	4.7549,9—30	2.5318,1—15	2.7079,0—15	0°
5	2.6246,9	2.2240,1	5.2167,2	4.7335,4	2.5284,9	2.7045,9	5
10	2.6106,8	2.2038,5	5.1807,3	4.6644,4	2.5185,1	2.6946,0	10
15	2.5922,9	2.1682,0	4.1177,2	4.5292,1	2.5017,0	2.6777,9	15
20	2.5630,1	2.1149,4	5.0220,1	4.2636,5	2.4777,9	2.6538,7	20
25	2.5227,0	2.0390,2	4.8817,3	3.1129,4	2.4463,7	2.6224,5	25
30	2.4737,8	1.9299,3	4.6681,4	4.1943,3 <i>n</i>	2.4068,6	2.5829,6	30
35	2.4106,1	1.7649,2	4.2765,8	4.4894,6 <i>n</i>	2.3585,4	2.5346,3	35
40	2.3312,2	1.4698,2	3.6739,2 <i>n</i>	4.6338,6 <i>n</i>	2.3003,1	2.4764,1	40
45	2.2307,0	— ∞	4.3570,5 <i>n</i>	4.7092,3 <i>n</i>	2.2307,8	2.4068,6	45
50	2.0996,8	1.4698,2 <i>n</i>	4.5359,9 <i>n</i>	4.7394,3 <i>n</i>	2.1479,5	2.3240,3	50
55	1.9180,3	1.7649,2 <i>n</i>	4.5961,6 <i>n</i>	4.7341,7 <i>n</i>	2.0489,8	2.2250,8	55
60	1.6283,9	1.9299,3 <i>n</i>	4.5882,9 <i>n</i>	4.6970,0 <i>n</i>	1.9297,2	2.1058,5	60
65	0.7853,3	2.0390,2 <i>n</i>	4.5254,6 <i>n</i>	4.6292,4 <i>n</i>	1.7836,9	1.9598,0	65
70	1.4048,3 <i>n</i>	2.1149,4 <i>n</i>	4.4070,2 <i>n</i>	4.5308,2 <i>n</i>	1.5998,8	1.7760,5	70
75	1.7067,2 <i>n</i>	2.1682,0 <i>n</i>	4.2215,6 <i>n</i>	4.4029,6 <i>n</i>	1.3577,4	1.5339,0	75
80	1.8432,3 <i>n</i>	2.2038,5 <i>n</i>	3.9421,6 <i>n</i>	4.2539,7 <i>n</i>	1.0111,5	1.1872,4	80
85	1.9095,6 <i>n</i>	2.2240,1 <i>n</i>	3.5239,9 <i>n</i>	4.1170,9 <i>n</i>	0.4133,0	0.5888,3	85
90	1.9299,3 <i>n</i>	2.2307,0 <i>n</i>	3.1529,3 <i>n</i>	4.0560,2 <i>n</i>	— ∞	— ∞	90

TABELLA IV.

φ	$\log R$	R/a	$\log R - \log a$	φ
0°	6.803 2470,8	— 1,002 2489,3	0,000 9756,0 n	0°
5	2683,7	— 1,002 1998,0	9543,1 n	5
10	3342,4	— 1,002 0478,0	8884,4 n	10
15	4418,2	— 1,001 7996,1	7808,6 n	15
20	5878,6	— 1,001 4628,0	6348,2 n	20
25	7679,7	— 1,001 0475,1	4547,1 n	25
30	9767,1	— 1,000 5665,3	2459,7 n	30
35	6.804 2077,8	— 1,000 0343,1	0149,0 n	35
40	4541,9	+ 1,000 5332,1	2315,1	40
45	7084,6	+ 1,001 1191,3	4857,8	45
50	9628,9	+ 1,001 7058,4	7402,1	50
55	6.805 2097,1	+ 1,002 2753,1	9870,3	55
60	4414,4	+ 1,002 8102,4	0,001 2187,6	60
65	6509,9	+ 1,003 2942,2	4283,1	65
70	8319,6	+ 1,003 7123,8	6092,8	70
75	9788,1	+ 1,004 0518,3	7561,3	75
80	6.806 0870,5	+ 1,004 3021,0	8643,7	80
85	1533,5	+ 1,004 4554,3	9306,7	85
90	1756,7	+ 1,004 5070,5	9529,9	90

e di altre, molto più complesse, e che perciò non sono utilizzabili, che si possono trarre considerando i termini A_5 , A_6 ed i coefficienti C_4 , C_5 .

I coefficienti C_8 , C_9 , C_{10} sono indipendenti dalla latitudine. Per la sfera considerata esse assumono rispettivamente i seguenti valori:

$$C_8 = 5,3494 \cdot 10^{-20} [5.7283 0895 - 20]$$

$$C_9 = 1,7831 \cdot 10^{-20} [5.2511 8765 - 20]$$

$$C_{10} = 3,5662 \cdot 10^{-20} [5.5522 1765 - 20].$$

Le formule ricavate in questo studio possono tornare utili in tutti quei problemi geodetici di carattere geometrico-cartografico in cui sia lecito considerare come superficie di riferimento la *sfera locale* di raggio:

$$R = a (1 - e^2)^{1/2} : (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

anzichè la superficie ellissoidica di diametro equatoriale $2a$ e di eccentricità e , e quindi limitatamente al campo geodetico di Weingarten.

Per l'ellissoide di Hayford i raggi della sfera locale alle varie latitudini equidistanti di 5° in 5° dall'equatore al polo assieme ai rapporti di conversione R/a ed alle differenze logaritmiche, di cui al capo precedente, atti alla utilizzazione dei dati inseriti nelle Tavole I e II quando si viene ad operare sulle varie sfere locali, sono riuniti nella Tavola IV.

Prof. GIOVANNI BOAGA

Geodeta Capo dell'Istituto Geografico Militare.