

SCOSTAMENTO DI UN BREVE ARCO DI TRASFORMATTA PIANA

di un arco di geodetica ellissoidica, per mezzo della rappresentazione conforme, dal segmento lineare che ne congiunge gli estremi

Sia P un punto di una superficie σ ; riferiamo i punti Q di una geodetica g di σ passante per P , alla terna trirettangolare di origine P avente l'asse delle Z coincidente con la normale a σ in P e gli assi X, Y coincidenti con le tangenti in P alle sezioni normali principali di cui R_1, R_2 siano i raggi principali di curvatura.

Se α indica l'angolo di direzione della g (cioè l'angolo che la direzione positiva dell'asse delle X forma con la tangente alla g staccata da P col verso positivo nella direzione delle s crescenti, con s coordinata curvilinea di Q contata su g da P), le coordinate ortogonali x, y, z di Q si ottengono in funzione delle coordinate geodetiche polari α, s per mezzo di sviluppi in serie, ordinati secondo le potenze crescenti dell'arco s , noti in Geometria differenziale col nome di *formule di Puiseux-Weingarten* (1).

In Geodesia si applicano tali sviluppi considerando l'ellissoide rotazionale terrestre per superficie σ ed esplicitando termini di qualsiasi ordine; in pratica però si utilizzano le formule fino ai termini di quarto o quinto ordine e ciò in relazione alla lunghezza della geodetica che si considera, rispetto alla curvatura ellissoidica (2).

Applicando i concetti della *trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati su di una superficie qualunque* (3), il Tonolo prima ed il Morelli poi, sono riusciti a svincolare la trattazione del problema dal legame che la curva sia una geodetica ed hanno ottenute sviluppi analoghi per curve qualunque (4). In questo caso le equazioni delle geodetiche necessarie per ottenere gli sviluppi di Puiseux-Weingarten, vengono sostituite dalle formule di Frenet generalizzate e nelle formule che si ricavano, denominate *sviluppi generalizzati di Weingarten*, vengono messe in evidenza, oltre alla curvatura totale della superficie, la curvatura geodetica γ dell'arco di curva che si considera e le sue derivate intrinseche $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots$ cioè prese con riferimento all'arco della linea considerata, e la curvatura $1/R_\alpha$ della sezione normale tangente in P alla curva, legata alle curvaturei principali $1/R_1, 1/R_2$ dal ben noto teorema di Eulero.

Le formule ottenute dal Tonolo, estese ai termini del terzo ordine, valgono per curve dell'ellissoide terrestre di lunghezze non maggiori ai 110 km. Quelle del Morelli, estese ai ter-

(1) Cnfr. BIANCHI L. - *Lezioni di Geometria differenziale*. Ed. Zanichelli. Bologna.

(2) Cnfr. CICONETTI G. - *Trattato di Geodesia e Topografia*. Vol. I, cap. IV. Casa Editrice Vallardi, Milano.

(3) L'elenco bibliografico di questi studi si trova nel mio lavoro « *Sulla risoluzione dei triangoli geodetici ellissoidici attraverso la loro rappresentazione piana conforme* » in Rend. Reale Accademia d'Italia, anno 1943-XXI, serie VI.

(4) TONOLO A. - *Sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Vol. XXIX, serie 6, 1939.

MORELLI C. - *Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati ed Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati*. Rend. R. Acc. d'Italia, vol. IV, serie VI, anno 1942-XXI.



mini del quarto ordine, valgono per curve di lunghezze non maggiori di 300 km. e sono sufficienti per la totalità dei casi considerati in geodesia.

La ricerca generale di tali sviluppi è molto complicata dal punto di vista analitico, intervenendo nei calcoli le derivate prime e seconde dei simboli di Christoffel di prima e di seconda specie, ad ogni modo gli sviluppi generali a cui è pervenuto il Morelli, sono:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad x &= s \cos \alpha - \frac{s^2}{2} \gamma \operatorname{sen} \alpha - \frac{s^3}{6} (\gamma^2 \cos \alpha + \dot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha + K_{1\alpha} \cos \alpha) + \\
 &+ \frac{s^4}{24} \left\{ \gamma^3 \operatorname{sen} \alpha - \ddot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha - 3 \gamma \dot{\gamma} \cos \alpha + 5 \gamma (K_{11} - K_{12}) \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \right. \\
 &+ K_{1\alpha} \gamma \operatorname{sen} \alpha + 3 K_{11\alpha} R'_{1\alpha} \cos^2 \alpha + 7 K_{22\alpha} R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha + \\
 &+ 8 K_{11\alpha} R'_{1\alpha} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 2 (K_{112} R'_{1\alpha} \cos \alpha - K_{122} R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha) \cdot \\
 &\left. \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha - 6 (K_{112} R'_{1\alpha} \cos \alpha + K_{222} R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen}^3 \alpha \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [2] \quad y &= s \operatorname{sen} \alpha + \frac{s^2}{2} \gamma \cos \alpha - \frac{s^3}{6} (\gamma^2 \operatorname{sen} \alpha - \dot{\gamma} \cos \alpha + K_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha) - \\
 &- \frac{s^4}{24} \left\{ \gamma^2 \cos \alpha - \ddot{\gamma} \cos \alpha + 3 \gamma \dot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha - 5 \gamma (K_{12} - K_{22}) \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha + \right. \\
 &+ K_{2\alpha} \gamma \cos \alpha - 7 K_{11\alpha} R'_{1\alpha} \cos^2 \alpha - 3 K_{22\alpha} R'_{2\alpha} \operatorname{sen}^2 \alpha - \\
 &- 8 K_{22\alpha} R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 2 (K_{122} R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha - K_{112} R'_{1\alpha} \cos \alpha) \cdot \\
 &\left. \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + 6 (K_{122} R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha + K_{111} R'_{1\alpha} \cos \alpha) \cos^3 \alpha \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [3] \quad z &= \frac{s^2}{2} K_{\alpha} - \frac{s^3}{6} \left\{ K_{11} (R'_{1\alpha} \cos \alpha + 3 R'_{1\alpha} \operatorname{sen} \alpha) \cos^2 \alpha + \right. \\
 &+ K_{22} (3 R'_{2\alpha} \cos \alpha + R'_{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \gamma (K_1 - K_2) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left. \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

dove è stato messo per brevità di scrittura:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = R'_{i\alpha}, \quad \frac{\partial R_j}{\partial y} = R'_{j\alpha}, \quad K_{ij} = \frac{I}{R_{ij}}, \quad K_{ijh} = \frac{I}{R_i R_j R_h}$$

Nelle [1], [2], [3] come di consueto, l'angolo di direzione, le curvature e le loro derivate, messe in evidenza nei secondi membri, si intendono sempre riferite all'origine P delle coordinate.

Trascurando in dette formule i termini che sono almeno al terzo ordine, si ottengono le formule corrispondenti del Tonolo.

Ponendo invece $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$, $\ddot{\gamma} = 0$, ... si ottengono i classici sviluppi di Puiseux-Weingarten, con riferimento all'arco di geodetica, considerati in Geodesia.

Ciò premesso, consideriamo ora sul piano un arco di curva C di estremi A, B ed immaginiamo che esso sia ottenuto per rappresentazione conforme di un arco di geodetica ellissoidica g di estremi corrispondenti A', B' . Le formule di corrispondenza siano:

$$[4] \quad x = x(U, \lambda) \qquad y = y(U, \lambda)$$



con U latitudine isometrica e λ longitudine geografica dei punti di g . Le funzioni [4] siano finite, continue e derivabili almeno fino all'ordine che ci interessa (quarto). Se si conviene di scegliere sul piano gli assi $x y$ in modo che risultino eguali: l'angolo di direzione della AB e l'azimut della geodetica $A'B'$ in A' e se si conviene inoltre di considerare l'origine delle coordinate coincidente con l'estremo A , allora è possibile applicare gli sviluppi dianzi scritti e determinare le coordinate rettangolari dei punti Q , della trasformata C , di ascissa curvilinea s , essendo bastevole porre nelle [1], [2]:

$$K_i = K_{ij} = K_{ijh} = 0.$$

Con ciò otteniamo:

$$[5] \quad x_Q = s \cos \alpha - \frac{s^2}{2} \gamma \operatorname{sen} \alpha - \frac{s^3}{6} (\gamma^2 \cos \alpha + \dot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha) + \\ + \frac{s^4}{24} (\gamma^3 \operatorname{sen} \alpha - \ddot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha - 3 \gamma \dot{\gamma} \cos \alpha) + \dots$$

$$[6] \quad y_Q = s \operatorname{sen} \alpha + \frac{s^2}{2} \gamma \cos \alpha - \frac{s^3}{6} (\gamma^2 \operatorname{sen} \alpha - \dot{\gamma} \cos \alpha) - \\ - \frac{s^4}{24} (\gamma^3 \cos \alpha - \ddot{\gamma} \cos \alpha + 3 \gamma \dot{\gamma} \operatorname{sen} \alpha) + \dots$$

mentre la [3] dà ovviamente $z_Q = 0$ (5).

Le coordinate x_B, y_B dell'estremo B si traggono dalle [5], [6] ponendo in esse l al posto di s , dove con l intendosi la lunghezza dell'arco curvilineo AB . L'angolo β che la direzione positiva dell'asse delle X forma con la direzione AB della corda si determina mediante la:

$$[7] \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{y_B}{x_B}$$

e per sostituzione si perviene facilmente alla:

$$[8] \quad \operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha + \left\{ -\frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} (\dot{\gamma} + \frac{3}{2} \gamma^2 \operatorname{tang} \alpha) l^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} (\ddot{\gamma} + 4 \gamma \dot{\gamma} \operatorname{tang} \alpha + \gamma^3 + 3 \gamma^3 \operatorname{tang}^2 \alpha) l^3 \right\} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha)^{-1/2}$$

(5) Ponendo nelle (5) e (6) $\alpha = 0$, oppure effettuando una rotazione degli assi ortogonali dell'ampiezza α , si ottengono le

$$\left\{ \begin{array}{l} x_Q^t = s - \frac{s^3}{6} \gamma^2 - \frac{s^4}{8} \gamma \dot{\gamma} + \dots \\ y_Q^t = \frac{s^2}{2} \gamma + \frac{s^3}{6} \dot{\gamma} - \frac{s^4}{24} (\gamma^3 - \ddot{\gamma}) + \dots \end{array} \right.$$

che esprimono le coordinate dei punti Q di C riferite al sistema ortogonale avente l'asse X^t coincidente con la tangente t alla curva C in P e l'asse Y^t ad esso normale. La y_Q^t esprime lo scostamento del punto Q dalla tangente t . Queste due formule, a meno della notazione dei primi membri e del segno per tutti i termini del secondo membro della seconda, coincidono con le formule (95), pag. 42, del Testo tecnico dell'I. G. M. « Sulla rappresentazione conforme di Gauss » determinate direttamente con altro procedimento.



Si esplicita β immediatamente ponendo :

$$[9] \quad \beta = \alpha - \Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3$$

con $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ termini di primo, secondo, terzo ordine rispettivamente, svolgendo la [9] in serie di Taylor e confrontando i risultati che si ottengono con la [8]. Effettuando queste operazioni e questo confronto si traggono le :

$$[10] \quad \Theta_1 = \frac{1}{2} \gamma l \quad \Theta_2 = \frac{1}{6} \dot{\gamma} l^2 \quad \Theta_3 = \frac{1}{24} \ddot{\gamma} l^3 \dots$$

Pertanto :

$$[11] \quad \beta = \alpha - \omega$$

con :

$$[12] \quad \omega = \frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} \dot{\gamma} l^2 + \frac{1}{24} \ddot{\gamma} l^3 + \dots$$

e $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots$ calcolate all'origine A ⁽⁶⁾. Conseguentemente :

$$[13] \quad \sin \omega = \frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} \dot{\gamma} l^2 + \frac{1}{24} \left(\ddot{\gamma} - \frac{1}{2} \gamma^3 \right) l^3 + \dots$$

$$[14] \quad \cos \omega = 1 - \frac{1}{8} \gamma^2 l^2 - \frac{1}{12} \gamma \dot{\gamma} l^3 + \dots$$

Effettuando ora la rotazione di ampiezza β degli assi cartesiani di riferimento, le coordinate ξ_Q, η_Q di Q rispetto al nuovo sistema vengono date dalle note relazioni :

$$[15] \quad \begin{cases} \xi_Q = x_Q \cos \beta + y_Q \sin \beta \\ \eta_Q = -x_Q \sin \beta + y_Q \cos \beta \end{cases}$$

(6) La formula (12) coincide con l'ultima formula della pag. 43 del dianzi citato Testo tecnico dell'I. G. M. e con la formula (35) di pag. 13 della Memoria del prof. A. TONOLO, « *Studi di trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie* ». Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XIII (1939). Vedi anche MORELLI C., « *Formule fondamentali per l'estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati sopra una superficie qualunque* ». Rend. R. Acc. d'Italia. Memoria n° 17, anno 1942-XXI, formula (61) a pag. 1057.

Si avverte che introducendo la curvatura γ_C corrispondente al punto C di AB che divide AB in due parti tali che si abbia $AC : AB = 1 : 3$, essendo :

$$\gamma_C = \gamma + \frac{l}{3} \dot{\gamma} + \frac{l^2}{18} \ddot{\gamma} + \dots$$

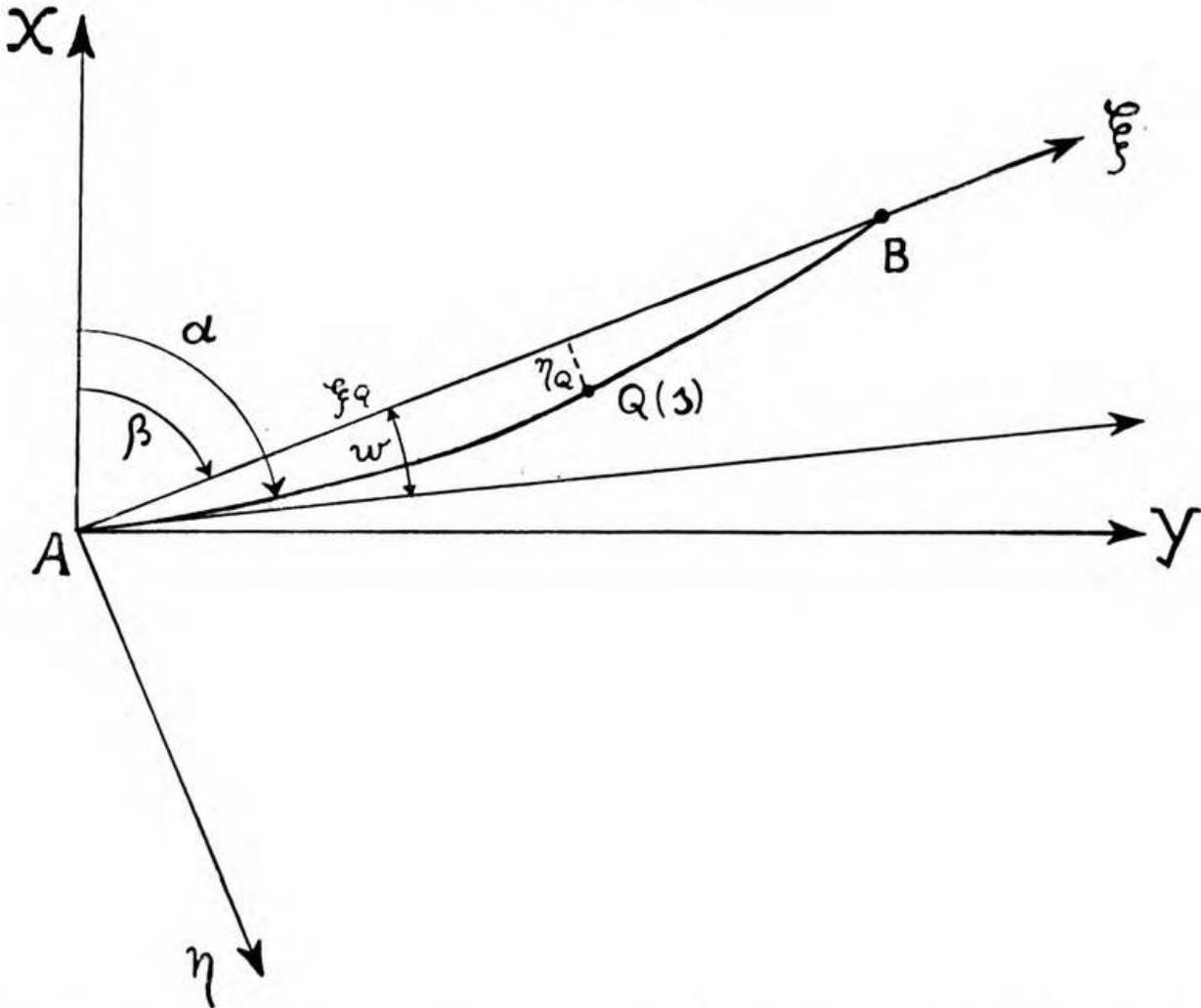
si ottiene :

$$(*) \quad \omega = \frac{1}{2} \gamma_C l + \frac{1}{72} \ddot{\gamma}_C l^3 + \dots$$

rimanendo così eliminato il termine del secondo ordine, sì che nelle applicazioni numeriche conviene utilizzare la (*) anziché la (12). Tonolo e Morelli, con riferimento al punto di mezzo M dell'arco AB hanno trovato invece :

$$\omega = \frac{1}{2} \gamma_M l - \frac{1}{12} \dot{\gamma}_M l^2 + \frac{1}{48} \ddot{\gamma}_M l^3 + \dots$$





di cui la seconda esprime appunto lo scostamento dell'arco di trasformata dalla corrispondente corda rettilinea (vedi figura) ed è proprio la relazione che ci siamo proposti di determinare (7).

Introducendo nelle [15] le [5], [6], [11], [13] e [14] si giunge alle :

$$[16] \quad \xi_Q = s - \frac{1}{24} \gamma^2 (3l^2 - 6sl + 4s^2) \cdot s - \\ - \frac{1}{24} \gamma \dot{\gamma} (2l^3 - 2sl^2 - 2s^2l + 3s^3) \cdot s + \dots$$

$$[17] \quad \xi_Q = \frac{1}{2} \gamma (l-s) \cdot s + \frac{1}{6} \dot{\gamma} (l^2 - s^2) \cdot s + \frac{1}{24} \ddot{\gamma} (l^3 - s^3) \cdot s - \\ - \frac{1}{48} \gamma^3 (l-s) (l^2 - 2sl + 2s^2) \cdot s + \dots$$

Dalla [16] posto $s = l$ si ricava la lunghezza l' della corda della trasformata ; la differenza fra la lunghezza della trasformata e quella della corda corrispondente è :

$$[18] \quad l - l' = \frac{1}{24} \gamma \left(\gamma - \dot{\gamma} l \right) l^3 + \dots$$

(7) Un problema analogo a questo, a quanto sappiamo, fu risolto da O. SCHREIBER, ma con altri procedimenti ed in un caso particolare nella Nota : *Die Gleichung und der Lauf den Bildkurve eines Grosstenkreisbogens in Mercators Projection* (Zeitschrift f. Vermessungswesen, anno 1908). Vedi anche : LABORDE C., *Traité de Cartographie*, tome IV, dove della nostra (17) sono dati soltanto i primi due addendi.



cioè almeno del terzo ordine. Tale differenza risulta funzione dell'angolo di direzione α della trasformata in quanto esso entra nella curvatura γ definita dalla ⁽⁸⁾

$$[19] \quad \gamma = \frac{y \cos \alpha}{N^2}$$

con N gran normale ellissoidica.

Dall'esame poi della [17] risulta che lo scostamento massimo della trasformata alla corda non coincide con il punto di mezzo M dell'arco AB ; esso massimo è pure funzione dell'angolo di direzione α ed è dato dal valore della coordinata curvilinea s che annulla la derivata prima della [17] stessa rispetto ad s .

Introducendo nella [18] e nella [17] la [19] ed osservando che

$$[20] \quad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} \sin \alpha = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{N^2}$$

e successivamente:

$$[21] \quad \ddot{\gamma} = 0$$

si ottengono le:

$$[22] \quad l - l' = \frac{y(y + l \sin \alpha) l^3}{24 N^4}$$

$$[23] \quad \eta_Q = \frac{y \cos \alpha}{2 N^2} (l - s) s + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6 N^2} (l^2 - s^2) s + \dots$$

nella seconda delle quali è stato abbandonato il contributo dovuto ai termini di terzo ordine. Nelle [22], [23] y rappresenta la ordinata dell'estremo A rispetto al primitivo sistema di assi X, Y . Nel caso della figura, finora considerato, $y = 0$ e quindi:

$$\gamma = 0 \quad , \quad \eta_Q = 0$$

η_Q si annulla poi anche quando $s = l$, ossia nel secondo estremo B .

Sottoponendo al calcolo numerico la [22] per una trasformata della lunghezza $l = 40$ km e per una ordinata y dell'estremo A variabile da 0 km a 100 km di 10 in 10 km si ottengono i risultati seguenti, assumendo per α il valore medio 45° calcolando N per la latitudine di 45° (ellissoide di Hayford).

y	$l - l'$	y	$l - l'$
0 km	0,000 mm	60 km	0,008 mm
10	0,001	70	0,011
20	0,002	80	0,014
30	0,003	90	0,017
40	0,004	100	0,021
50	0,006		

⁽⁸⁾ Cnfr. CH. M. SCHOLS. - *La courbure de la projection de la ligne géodésique*. Annales de l'Ecole polytechnique de Delf, volume dell'anno 1886.



Per una trasformata lunga 100 km e per l'ordinata y dell'estremo A pure di 100 km si trova per $\alpha = 90^\circ$ e latitudine di 45° :

$$l - l' = 0,5 \text{ mm} .$$

Risultati di questo genere non sono nuovi in Geodesia, basta all'uopo ricordare la differenza fra le lunghezze di geodetica e di sezione normale passanti per due punti della superficie ellissoidica terrestre. Essi ci permettono di concludere:

La lunghezza dell'arco di trasformata si può ritenere eguale alla corda rettilinea avente gli stessi estremi, purchè i corrispondenti estremi della geodetica ellissoidica da cui provengono, siano contenuti nel campo di Weingarten. Nel caso diverso la differenza di lunghezza si calcola con la [22].

Passando ai calcoli la [23], ponendo ancora $\alpha = 45^\circ$, $l = 40$ km, ed s variabile in progressione aritmetica di ragione 5 km, da 0 km a 40 km, per la latitudine media di 45° , ritenendo $y = 0$, come nella figura, i contributi del secondo addendo della [23] (perchè il primo è nullo), sono dei seguenti importi:

s	ηQ	s	ηQ
0 km	0,00 m	25 km	0,50 m
5	0,16	30	0,43
10	0,31	35	0,27
15	0,42	40	0,00
20	0,49	—	—

Considerando ora trasformate aventi la medesima lunghezza ed il medesimo angolo di direzione con ordinata dell'estremo A variabile di 10 km in 10 km, da 0 km a 100 km, il primo addendo della [23], ritenendo ancora s variabile in progressione aritmetica di ragione 5 km, fornisce i contributi raccolti nella Tavola I ed espressi in metri. Associando i contributi dei due termini della [23] si ottengono i risultati totali inseriti nella Tavola II pure espressi in metri.

TAVOLA I.

ORDI- NATA y	ASCISSE CURVILINEE s IN KM								
	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0 km	m 0,00	m 0,00	m 0,00	m 0,00	m 0,00	m 0,00	m 0,00	m 0,00	m 0,00
10	0,00	0,03	0,05	0,06	0,07	0,06	0,05	0,03	0,00
20	0,00	0,06	0,10	0,13	0,14	0,13	0,10	0,06	0,00
30	0,00	0,09	0,15	0,19	0,21	0,19	0,15	0,09	0,00
40	0,00	0,12	0,20	0,25	0,28	0,25	0,20	0,12	0,00
50	0,00	0,15	0,26	0,32	0,35	0,32	0,26	0,15	0,00
60	0,00	0,18	0,31	0,39	0,42	0,39	0,31	0,18	0,00
70	0,00	0,21	0,36	0,45	0,48	0,45	0,36	0,21	0,00
80	0,00	0,24	0,41	0,51	0,55	0,51	0,41	0,24	0,00
90	0,00	0,27	0,46	0,58	0,62	0,58	0,46	0,27	0,00
100	0,00	0,30	0,52	0,65	0,69	0,65	0,52	0,30	0,00



TAVOLA II.

ORDI- NATA y	ASCISSE CURVILINEE s IN KM								
	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0 km	0,00	0,16	0,31	0,42	0,49	0,50	0,49	0,27	0,00
10	0,00	0,19	0,36	0,48	0,56	0,56	0,54	0,30	0,00
20	0,00	0,22	0,41	0,55	0,63	0,63	0,59	0,33	0,00
30	0,00	0,25	0,46	0,61	0,70	0,69	0,64	0,36	0,00
40	0,00	0,28	0,51	0,67	0,77	0,75	0,69	0,39	0,00
50	0,00	0,31	0,57	0,74	0,84	0,82	0,75	0,42	0,00
60	0,00	0,34	0,62	0,81	0,91	0,88	0,80	0,45	0,00
70	0,00	0,37	0,67	0,87	0,97	0,95	0,85	0,48	0,00
80	0,00	0,40	0,72	0,93	1,04	1,01	0,90	0,51	0,00
90	0,00	0,43	0,77	1,00	1,11	1,08	0,95	0,54	0,00
100	0,00	0,46	0,83	1,07	1,18	1,15	1,01	0,57	0,00

I risultati analitico-numeriche messi in evidenza con questo studio, senza considerare particolari tipi di rappresentazioni conformi, sono di carattere generale e devono essere tenuti presenti nei problemi di carattere geodetico e cartografico, quando si vogliono usare i procedimenti della rappresentazione conforme dell'ellissoide sul piano per la risoluzione dei triangoli geodetici o quando si voglia disegnare per punti la trasformata di una geodetica in una data scala con piccolo denominatore.

Gli sviluppi esposti si possono considerare come nuovo contributo agli studi della geometria dei piccoli triangoli curvilinei piani ottenuti dai triangoli geodetici ellissoidici per mezzo della rappresentazione conforme dell'ellissoide rotazionale sul piano.

Prof. GIOVANNI BOAGA

Ordinario della R. Università di Roma e
Geodeta Capo all' Istituto Geografico Militare.

Firenze, 22 aprile 1943.

