SUL TRASPORTO DELLE COORDINATE CURVILINEE LUNGO UN ARCO DI GEODETICA SU UNA SUPERFICIE QUALUNQUE CON APPLICAZIONI AL PROBLEMA GEODETICO DEL TRASPORTO DELLE COORDINATE GEOGRAFICHE

1. – Siano $x^i = \text{cost.}$ $(i = 1, 2)$ due sistemi generici di linee coordinate su una superficie qualunque σ. Un punto P di essa, con riferimento a tali sistemi di linee, sia definito dalle coordinate curvilinee x^i. Ci proponiamo di determinare le coordinate curvilinee x^i_Q di un punto Q della geodetica della superficie σ passante per P e di assegnato angolo θ di direzione con la $x^2 = \text{cost.}$ nel punto P (cioè di dato angolo compreso fra 0 e 2π di cui deve ruotare nel senso positivo sul piano tangente la direzione positiva della tangente alla linea x^2 per sovrapporsi a quella della tangente alla geodetica considerata) e ciò in funzione delle coordinate x^i del punto P e dei parametri s e θ dove s è la coordinata curvilinea di Q a partire da P, valutata sulla geodetica positivamente in un certo verso fissato sulla geodetica stessa.

Nel seguito immagineremo le x^i e θ funzioni della coordinata curvilinea s e dotate di derivate prime, seconde, ecc., finite e continue lungo l'arco $P\,Q$, estremi inclusi.

Le formule che risolvono il problema sono le seguenti corrispondenti agli sviluppi accorciati di Mac–Laurin:

[1] $$x^i_Q = x^i_P + s\,\dot{x}^i_P + \frac{1}{2}\,s^2\,\ddot{x}^i_P + \frac{1}{6}\,s^3\,\dddot{x}^i_P + \dots \qquad (i = 1, 2) \quad .$$

In esse, per semplicità di scrittura, si è posto:

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad \ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} \qquad \text{ecc.,}$$

corredandole dell' indice P per segnalare che esse vanno calcolate nel punto P, cioè per $s = 0$.

Desiderando anche l'angolo di direzione in Q si potrà far uso della formula analoga:

[2] $$\theta_Q = \theta_P + s\,\dot{\theta}_P + \frac{1}{2}\,s^2\,\ddot{\theta}_P + \dots$$

indicando con $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ le derivate prime e seconde di θ rispetto l'arco s.

Con le [1] e [2] il problema proposto è condotto al problema analitico della determinazione delle derivate prime, seconde, terze, ecc., delle funzioni x^1 e prima, seconda, ecc., della funzione θ.

L'arresto delle [1] al quarto termine del secondo membro e della [2] al terzo, corrisponde, in geodesia, al trasporto delle coordinate geografiche lungo un arco di geodetica dell'ellissoide terrestre inferiore a 200 km.

A quanto ci consta problemi simili a quello propostoci sono stati considerati da altri Autori: in particolare il *Levi-Civita* studiò il trasporto delle coordinate lungo una linea qualunque tracciata su un piano ed il *Tonolo* generalizzò i risultati del *Levi-Civita* considerando lo stesso problema per una linea qualunque segnata su una superficie pure qualunque ([1]), utilizzando a tale scopo le coordinate normali di Riemann.

Per la determinazione delle derivate messe in evidenza nelle [1] e [2] rammentiamo che il quadrato dell'elemento lineare della superficie σ è dato dalla seguente espressione quadratica ed omogenea nei differenziali delle variabili indipendenti:

$$ds^2 = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dx^r\, dx^s \tag{3}$$

con i sistemi covarianti di ordine due a_{rs} funzioni regolari di x^1 e dove agli indici r ed s si devono intendere sostituite via, via, tutte le disposizioni con ripetizione a due a due, degli indici 1, 2.

Risulta:

$$a_{12} = a_{21}\,. \tag{4}$$

Indicando con a (diverso da zero) il discriminante della [3], cioè il determinante formato con tutti i sistemi covarianti a_{rs}, si ha:

$$a = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \tag{5}$$

da cui discende, come elementi reciproci degli elementi a_{rs}, i seguenti sistemi controvarianti:

$$a^{rs} = (-1)^{r+s}\, \frac{A_{rs}}{a} \tag{6}$$

con A_{rs} complementare di a_{rs} nel determinante a.

([1]) Cfr. Levi-Civita T., *La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie* in « Rend. Sem. Matematico e Fisico di Milano », vol. XII, 1938.

Tonolo A., *Studi di trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie* in « Rend. Sem. Matematico e Fisico di Milano », vol. XIII, 1939.

In un ulteriore lavoro il Tonolo si occupa del trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo un arco di linea qualunque di un elissoide di rotazione (ved. Rend. Acc. Naz. dei Lincei vol. XXIX 1939, da pag. 573 a pag. 580 e Boaga G., *Nuovi studi geometrici interessanti la Geodesia*, in « Rivista L' Universo », anno 1940).

I simboli di Christoffel di prima e di seconda specie, o simboli a tre indici, sono definiti dalle :

[7] $$a_{rs,t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{rt}}{\partial x^r} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x^r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^t}\right)$$

[8] $$a^i_{rs} = \sum_{1}^{2}{}_t\, a^{it}\, a_{rs,t}$$

con :

$$a_{rs,t} = a_{sr,t} \qquad a^i_{rs} = a^i_{sr} \qquad a_{rs,t} + a_{ts,r} = \frac{\partial a_{rt}}{\partial x^s}$$

e da queste ulteriormente :

[9] $$\begin{cases} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = 2a_{11,1} = 2a_{11}\, a^1_{11} + 2a_{12}\, a^2_{11} \\ \dfrac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = 2a_{12,1} = 2a_{11}\, a^1_{12} + 2a_{12}\, a^2_{12} \end{cases}$$

ed altre simili che ci saranno utili nel seguito.

Le equazioni differenziali delle linee geodetiche su σ sono, in coordinate curvilinee :

[10] $$\ddot{x}^i + \Sigma_{rs}\, a^i_{rs}\, x^r\, \dot{x}^s = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

oppure, in funzione dell'angolo θ (equazione di Gauss) :

[11] $$\dot{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left\{\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1}\right)\dot{x}^1 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1}\right)\dot{x}^2 \right\}.$$

Come è facile vedere le [10] e [11] attraverso le [8], [7], [6], [5] risultano funzioni dei sistemi covarianti a_{rs} della forma quadratica [3], i quali alla lor volta sono definiti dalle :

[12] $$a_{rs} = \sum_{1}^{3}{}_t\, \frac{\partial y_t}{\partial x^r}\,\frac{\partial y_t}{\partial x^s}$$

con :

[13] $$\begin{cases} y_t = y_t\,(x^1, x^2) \\ (t = 1,2,3) \end{cases}$$

e che rappresentano le coordinate trirettangolari $y_1 y_2 y_3$ dei punti di σ riferiti a un sistema cartesiano. Come è pure noto, tutta la metrica angolare della superficie σ è possibile esprimere attraverso i sistemi [12]: si ha in particolare per l'angolo ω compreso fra o e π, formato da un punto della superficie σ dalle direzioni positive delle linee coordinate x^i che vi passano le:

$$\text{[14]} \qquad \cos\omega = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}\, a_{22}}} \qquad\qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}\, a_{22}}}$$

e per l'angolo di direzione θ:

$$\text{[15]} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}}\, \dot{x}^2 \qquad\qquad \operatorname{sen}(\omega - \theta) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}}\, \dot{x}^1$$

Dalle [15] surrogando le [14] si traggono per le derivate prime, da introdurre nelle [1], le:

$$\text{[16]} \qquad \begin{cases} \dot{x}^1 = \dfrac{1}{\sqrt{a_{11}}} \left(\cos\theta - \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}\theta\right) \\[2ex] \dot{x}^2 = \dfrac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Le derivate seconde si ottengono senz'altro dalle equazioni delle geodetiche [10] (¹). Tenendo conto anche delle [16] per tali derivate valgono le espressioni:

$$\text{[17]} \qquad \begin{aligned} \ddot{x}^i = &- a^{\,i}_{11} \frac{1}{a_{11}} \left(\cos^2\theta - \frac{a_{12}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{(a_{12})^2}{a} \operatorname{sen}^2\theta\right) - \\ &- a^{\,i}_{12} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} 2\theta - 2\, \frac{a_{12}\sqrt{a_{11}}}{a} \operatorname{sen}^2\theta\right) - a^{\,i}_{22}\, \frac{a_{11}}{a} \operatorname{sen}^2\theta\,. \end{aligned}$$

Per l'ulteriore calcolo delle derivate terze si osservi che queste scendono dalle [10] derivandole rispetto s, ; si deve qui tener conto, per la derivazione dei simboli di Christoffel di seconda specie, della:

$$\text{[18]} \qquad \frac{d a^{\,i}_{rs}}{ds} = \frac{\partial a^{\,i}_{rs}}{\partial x^1}\, \dot{x}^1 + \frac{\partial a^{\,i}_{rs}}{\partial x^2}\, \dot{x}^2\,.$$

Si ha con ciò:

$$\text{[19]} \qquad \dddot{x}^i = -\Sigma_{rs} \left\{ \frac{d a^{\,i}_{rs}}{ds}\, \dot{x}^r \dot{x}^s + a^{\,i}_{rs} \left(\ddot{x}^r \dot{x}^s + \dot{x}^r \ddot{x}^s\right) \right\}$$

(¹) Il LEVI-CIVITA ed il TONOLO utilizzano per il calcolo delle derivate successive, le formule di Frenet generalizzate, ved. TONOLO *Sui poligoni di Frenet*, in «Atti R. Ist. Veneto», Tomo XCVIII, 1939.

Introducendo in questa le [18], [17] e [16] si ottiene una espressione per la derivata terza dove sono messi in evidenza soltanto i sistemi covarianti a_{rs}, i simboli a tre indici di seconda specie con le loro derivate e le funzioni trigonometriche dell'angolo θ.

Derivando la [11], tenendo ancora conto delle [16] e [17] si ottiene una formula per $\ddot{\theta}$ con le medesime caratteristiche della precedente.

Introducendo da ultimo nelle [1] e [2] i risultati di cui alle [16], [17], [19], ecc., e tenendo conto delle [8], [7], [6], si ricavano le tre formule che risolvono completamente il problema in funzione dei sistemi covarianti a_{rs} e delle loro derivate parziali prime e seconde, della coordinata curvilinea s, dell'angolo θ di direzione e delle coordinate del punto P.

2. – Nel caso in cui le linee coordinate sono ortogonali risulta:

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

e le formule indicate si riducono alquanto. Il discriminante diviene allora:

$$a = a_{11}\, a_{22} \quad . \tag{20}$$

I sistemi controvarianti [6] risultano dati dalle:

$$a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2) \tag{21}$$

ed i simboli di Christoffel di prima e seconda specie assumono le forme:

$$\begin{aligned} a_{11,1} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1}\,, \qquad a_{12,1} = a_{21,1} = -\,a_{11,2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} \\ a_{22,2} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x^2}\,, \qquad a_{12,2} = a_{21,2} = -\,a_{22,1} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{1} &= \frac{1}{2\,a_{11}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial\, x^1}\,, \qquad a_{11}^{2} = -\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{a_{22}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} \\ a_{12}^{1} &= a_{21}^{1} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial x^2}\,, \qquad a_{12}^{2} = a_{21}^{2} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial x^1} \\ a_{22}^{1} &= -\,\frac{1}{2\,a_{11}}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} \qquad a_{22}^{2} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial x^2}\quad . \end{aligned} \tag{23}$$

Le derivate [16] assumono le forme molto semplici:

$$\dot{x}^1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\cos\theta \qquad \dot{x}^2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{24}$$

e la equazione [11] di Gauss:

$$[25] \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} \dot{x}^1 - \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} \dot{x}^2 \right\} .$$

Introducendo ulteriormente in queste le [24] si perviene alla:

$$[26] \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial x^2} \cos\theta - \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial x^1} \operatorname{sen}\theta \right\}$$

e tenendo conto che le curvature geodetiche lungo le linee coordinate sono definite dalle:

$$[27] \qquad \gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial x^1} \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial x^2}$$

si trae:

$$[25'] \qquad \dot{\theta} = \gamma_1 \operatorname{sen}\theta - \gamma_2 \cos\theta .$$

La [17], tenendo conto della [23], fornisce le:

$$[28] \qquad \begin{aligned} \ddot{x}^1 &= -\frac{1}{2a} \left\{ \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} \cos^2\theta + \frac{a_{22}}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} \operatorname{sen} 2\theta - \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} \operatorname{sen}^2\theta \right\} \\ \ddot{x}^2 &= -\frac{1}{2a} \left\{ -\frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} \cos^2\theta + \frac{a_{11}}{\sqrt{a}} \frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{a_{11}}{a_{22}} \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} \operatorname{sen}^2\theta \right\} . \end{aligned}$$

In simil modo si ottiene facilmente la [19] in forma esplicita, tenendo conto delle posizioni via, via, fatte.

3. – Se i sistemi covarianti di ordine due a_{ii} $(i = 1, 2)$ risultano: il primo funzione della sola x^2 ed il secondo funzione della sola x^1, allora le formule stabilite in precedenza si semplificano ancora. I coefficienti a tre indici risultano nulli quando gli indici sono eguali, mentre gli altri valgono:

$$[29] \qquad a_{ji,j} = a_{ij,j} = -a_{jj,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x^i}$$

con $j = 1, i = 2$ e $j = 2$ e $i = 1$ rispettivamente.

Per i simboli di seconda specie si hanno le :

[30]
$$a^{1}_{11} = a^{2}_{22} = 0 \ , \ a^{2}_{11} = -\frac{1}{2\,a_{22}}\frac{\partial\, a_{11}}{\partial\, x^{2}},\ a^{1}_{12} = a^{1}_{21} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial\, x^{2}}$$

$$a^{1}_{12} = a^{2}_{21} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial\, x^{1}} \qquad a^{1}_{22} = -\frac{1}{2\,a_{11}}\frac{\partial\, a_{22}}{\partial\, x^{1}} \ .$$

Le [24] e [25] rimangono invariate, mentre le [28] si riducono, in quanto perdono rispettivamente il primo ed il terzo termine, ed assumono le forme :

[31]
$$\ddot{x}^{1} = -\frac{1}{a}\left(\frac{a_{22}}{\sqrt{a}}\frac{\partial\, a_{11}}{\partial\, x^{2}}\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{\partial\, a_{22}}{\partial\, x^{1}}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\ddot{x}^{2} = -\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\, a_{11}}{\partial\, x^{2}}\cos\theta + \frac{a_{11}}{\sqrt{a}}\frac{\partial\, a_{22}}{\partial\, x^{1}}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\cos\theta \ .$$

Il calcolo delle $\dddot{x}^{1}$ e $\ddot{\theta}$ si eseguisce col procedimento accennato al paragrafo precedente.

4. – Dal punto di vista geodetico però ha più importanza il seguente caso particolare : coordinate curvilinee rettangolari e a_{11}, a_{22} funzioni di una sola delle variabili x^{i} per esempio della x^{1}. In questo caso i simboli a tre indici risultano dati dalle :

[32]
$$a_{11,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial\, a_{11}}{\partial\, x^{1}} \ , \ a_{12,2} = a_{21,2} = -\, a_{22,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial\, a_{22}}{\partial\, x^{1}}$$

tutti gli altri sono nulli. Similmente :

[34]
$$a^{1}_{11} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial\, x^{1}} \ , \ a^{2}_{12} = a^{2}_{21} = \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial\, x^{1}} \ , \ a^{1}_{22} = -\frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{\log \sqrt{a_{22}}}{\partial\, x^{1}}$$

e tutti gli altri nulli.

Anche in questo caso le [24] restano immutate mentre la [26] prende la forma

[35]
$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial\, x^{1}}\,\mathrm{sen}\,\theta = \gamma_{1}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e confrontando questa con la [25′] si conclude essere :

$$\gamma_{2} = 0$$

e quindi le linee $x^{1} =$ cost. risultano di curvatura geodetica nulla, cioè esse sono delle geodetiche mentre le $x^{2} =$ cost. sono le loro traiettorie ortogonali.

In modo analogo le [28] forniscono le

[36]
$$\ddot{x}^1 = -\frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial x^1}\cos^2\theta - \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial x^1}\operatorname{sen}^2\theta\right)$$
$$\ddot{x}^2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial x^1}\operatorname{sen} 2\,\theta$$

Dalle [36] si ricavano poi le $\dddot{x}^i$, tenendo conto delle:

[37]
$$\dddot{x}^i = \dot{x}^1 \frac{d\ddot{x}^i}{dx^1}$$

e dalla [25′] la $\ddot{\theta}$. Sostituendo questi risultati nelle [1] e [2] si ottengono le formule che risolvono il problema nel caso particolare preso in esame.

5. – Dalla Geometria differenziale è noto che è possibile in infiniti modi eseguire un cambiamento di variabili per modo che i sistemi di coordinate curvilinee risultanti siano fra loro ortogonali e tali da dividere la superficie σ in quadrati infinitesimi (sistemi isotermi).

Immaginando di aver operato un cambiamento di variabili in tale senso, i sistemi covarianti di ordine due risulteranno del tipo:

[38]
$$a_{12} = a_{21} = 0 \qquad\qquad a_{11} = a_{22} = m^2$$

dove supporremo m^2 funzione regolare, ecc., delle variabili x^i.

Il quadrato dell'elemento lineare, in base alla [3] assume allora la forma isoterma o isometrica:

[39]
$$ds^2 = m^2 \left\{ (d\,x^1)^2 + (d\,x^2)^2 \right\}.$$

I simboli a tre indici di prima specie risultano conseguentemente espressi dalle:

[40]
$$\begin{cases} a_{11,i} = (-1)^{i+1}\, m\,\dfrac{\partial m}{\partial x^i} \\[2ex] a_{12,i} = a_{21,i} = m\,\dfrac{\partial m}{\partial x^{i+1}} \\[2ex] a_{22,i} = (-1)^i\, m\,\dfrac{\partial m}{\partial x^i} \end{cases}.$$

Quelli di seconda specie risultano collegati alle [40] dalla relazione affatto generale:

[41]
$$a^i_{rs} = \frac{1}{m^2}\, a_{rs,i}\,.$$

L'equazione [10] delle geodetiche, tenuto conto di questi risultati diviene, con riferimento al sistema coordinato isotermo:

$$[42] \qquad \ddot{x}^i + \frac{1}{m}\left\{(-1)^{i+1}\frac{\partial m}{\partial x^i}(\dot{x}^1)^2 + 2\frac{\partial m}{\partial x^{i+1}}\dot{x}^1\dot{x}^2 + (-1)^i\frac{\partial m}{\partial x^1}(\dot{x}^2)^2\right\} = 0$$

od anche:

$$[43] \qquad \ddot{x}^i + (-1)^{i+1}\frac{\partial \log m}{\partial x^i}(\dot{x}^1)^2 + 2\frac{\partial \log m}{\partial x^{i+1}}\dot{x}^1\dot{x}^2 + (-1)^i\frac{\partial \log m}{\partial x^i}(x^2)^2 = 0 .$$

L'equazione [11] di Gauss assume la nuova forma:

$$[44] \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{m}\begin{vmatrix} \dot{x}^1 & \dot{x}^2 \\ \frac{\partial m}{\partial x^1} & \frac{\partial m}{\partial x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}^1 & \dot{x}^2 \\ \frac{\partial \log m}{\partial x^1} & \frac{\partial \log m}{\partial x^2} \end{vmatrix}$$

Successivamente dalle [14], [15] e [16] si deducono le:

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = m\dot{x}^2 \qquad\qquad \cos\theta = m\dot{x}^1$$

e di conseguenza:

$$[45] \qquad \dot{x}^1 = \frac{1}{m}\cos\theta \qquad \dot{x}^2 = \frac{1}{m}\operatorname{sen}\theta .$$

Le curvature geodetiche γ_1 e γ_2 sono espresse dalle:

$$[46] \qquad \gamma_i = -\frac{1}{2m^2}\frac{\partial m}{\partial x^{i+1}} .$$

Tenendo conto anche delle [45] la [43] fornisce per le derivate seconde delle x^i la seguente espressione in funzione di m, delle due derivate parziali e dell'angolo θ.

$$[47] \qquad \ddot{x}^i = \frac{1}{m^3}\left\{(-1)^i\frac{\partial m}{\partial x^i}\cos^2\theta - \frac{\partial m}{\partial x^{i+1}}\operatorname{sen}2\theta + (-1)^{i+1}\frac{\partial m}{\partial x^i}\operatorname{sen}^2\theta\right\}$$

o per le [46]:

$$[48] \qquad \ddot{x}^i = \frac{1}{m}\left\{\gamma^i\operatorname{sen}2\theta - (-1)^i\gamma_{i+1}\cos 2\theta\right\} .$$

La [44] si può allora scrivere sotto la forma, tenendo conto delle [45]:

$$[48'] \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{m^2}\left(\cos\theta\,\frac{\partial m}{\partial x^2} - \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial m}{\partial x^1}\right).$$

Per il calcolo delle derivate terze di x^i conviene scrivere le derivate parziali dei simboli a tre indici di seconda specie. A tale scopo osserviamo che dalle [21] e [22] scendono le:

$$a^{1}_{11} = a^{2}_{12} = -a^{1}_{22} = \frac{\partial \log m}{\partial x^1} = \frac{m_1}{m}$$

$$a^{1}_{12} = -a^{2}_{11} = a^{2}_{22} = \frac{\partial \log m}{\partial x^2} = \frac{m_2}{m}$$

e da queste:

$$\frac{\partial a^{1}_{11}}{\partial x^i} = \ldots = \frac{\partial^2 \log m}{\partial x' \,\partial x^i} = -\frac{1}{m^2}\, m_i\, m_1 + \frac{1}{m}\, m_{1i}$$

$$\frac{\partial a^{1}_{12}}{\partial x^i} = \ldots = \frac{\partial^2 \log m}{\partial x^2 \,\partial x^i} = -\frac{1}{m^2}\, m_i\, m_2 + \frac{1}{m}\, m_{2i}$$

dove con m_1, m_2, m_{11}, m_{12}, m_{22}, si indicano ora le derivate prime e seconde di m rapporto x^1, x^2, x^1 e x^1, x^1 e x^2, ecc.

Effettuando le sostituzioni indicate la [19] fornisce tosto le:

$$[49] \qquad \dddot{x}^i = A_i \cos^3\theta + B_i \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + C_i \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + D_i \operatorname{sen}^3\theta$$

con:

$$[50] \qquad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{m^5}\left(3\, m_1^2 - m\, m_{11} - 2\, m_2^2\right) \\ B_1 &= \frac{3}{m^5}\left(5\, m_1\, m_2 - m_1\, m_{12}\right) \\ C_1 &= -\frac{1}{m^5}\left(7\, m_1^2 - 8\, m_2^2 - m\, m_{11} + 2\, m\, m_{22}\right) \\ D_1 &= -\frac{1}{m^5}\left(5\, m_1\, m_2 - m\, m_{12}\right). \end{aligned}$$

Effettuando sugli indici messi in evidenza nelle parentesi la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si ottengono i nuovi coefficienti $A'_1\, B'_1\, C'_1\, D'_1$ i quali sono legati a quelli della derivata $\dddot{x}^2$ dalle:

$$[51] \qquad A_2 = D'_1 \qquad B_2 = C'_1 \qquad C_2 = B'_1 \qquad D_2 = A'_1$$

Mediante derivazione si ottiene similmente dalla [48′] la:

$$[52] \qquad \ddot{\theta} = A \cos 2\,\theta + B \operatorname{sen} 2\,\theta$$

con:

$$[53] \qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{m^4}\left(-3\, m_1\, m_2 + m\, m_{12}\right) \\ B &= \frac{1}{2\,m^4}\left(3\, m_1^2 - 3\, m_2^2 - m\, m_{11} + m\, m_{22}\right). \end{aligned}$$

Le [45], [47], [49] e [48′], [52] sostituite nelle [1] e [2] risolvono il problema limitatamente ai termini del terzo ordine, quando sulla superficie σ si considera un sistema isotermo di coordinate curvilinee isometriche x^i:

Se in questa ricerca si pone:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{m^2}$$

si trovano le formule stabilite da Hristow (1).

6. – Interesse speciale presenta ai fini geodetici il sistema isotermo con m funzione di una sola coordinata curvilinea, per esempio, della x^1.

In questo caso particolare le [45] restano immutate, mentre le [47] si trasformano nelle:

$$[54] \qquad \ddot{x}^1 = -\frac{1}{m^3}\, m_1 \cos 2\,\theta \qquad \ddot{x}^2 = \frac{1}{m^3}\, m_1 \operatorname{sen} 2\,\theta \quad .$$

Risulta così, come nel caso esaminato al § 4, $\gamma_2 = o$ e quindi le linee $x^1 =$ cost. sono delle geodetiche e le $x^2 =$ cost. le loro traiettorie ortogonali.

Nello stesso modo le [49] diventano:

$$[55] \qquad \begin{aligned} \dddot{x}^1 &= A_1 \cos^3\theta + C_1 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \\ \dddot{x}^2 &= B^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + D_2 \operatorname{sen}^3\theta \end{aligned}$$

(1) Cfr. Wl. K. Hristow. – « Berechnung der Koordinaten differenzen ecc. », in z. f. Werm. 1937.

con :

$$[56] \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{m^5}\left(3m_1^2 - m\, m_{11}\right) & C_1 &= \frac{1}{m^5}\left(7m_1^2 - m\, m_{11}\right) \\ B_2 &= -\frac{1}{m^5}\left(-8\, m_1^2 + 2\, m\, m_{11}\right) & D_2 &= -\frac{1}{m^5}\, 2\, m_1^2 \; . \end{aligned}$$

Le [48′] e le [52] assumono allora le forme :

$$[57] \quad \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{m_1}{m}\operatorname{sen}\theta \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{2\, m^4}\left(3\, m_1^2 - m\, m_{11}\right)\operatorname{sen} 2\,\theta \; . \end{aligned}$$

Sostituendo queste ultime nelle [1] e [2] si trovano le formule seguenti che risolvono il problema nel caso particolare accennato :

$$[58] \quad \left\{ \begin{aligned} x_Q^1 &= x_P^1 + \frac{s}{m}\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{m}\right)^2 \frac{1}{m}\, m_1 \cos 2\,\theta + \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{m}\right)^3 \frac{1}{m^2}\left\{ \left(3\, m_1^2 - m\, m_{11}\right)\cos^2\theta - \left(7\, m_1^2 - m\, m m_{11}\right)\operatorname{sen}^2\theta \right\}\cos\theta \\ x_Q^2 &= x_P^2 + \frac{s}{m}\operatorname{sen}\,\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{m}\right)^2 \frac{1}{m}\, m_1 \operatorname{sen} 2\,\theta + \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(\frac{s}{m}\right)^3 \frac{1}{m^2}\left\{ \left(4\, m_1^2 - m\, m_{11}\right)\cos^2\theta - m_1^2 \operatorname{sen}^2\theta \right\}\operatorname{sen}\theta \\ \theta_Q &= \theta_Q - \frac{s}{m} \cdot \frac{1}{m}\, m_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\left(\frac{s}{m}\right)^2 \frac{1}{m^2}\left(3\, m_1^2 - m\, m_{11}\right)\operatorname{sen} 2\,\theta \; . \end{aligned} \right.$$

7. – Per l'ellissoide terrestre – ellissoide di rotazione – di semi asse equatoriale a ed eccentricità e, il quadrato dell'elemento lineare sotto forma isoterma è :

$$[59] \quad ds^2 = r^2\left(dq^2 + d\,\lambda^2\right)$$

con parametri isometrici q (latitudine isoterma) e λ (longitudine). r è il raggio del parallelo alla latitudine ellissoidica φ definito dalla :

$$r = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \; .$$

La latitudine isoterma è legata a quella ellissoidica dalla :

$$[60] \quad q = ln \left\{ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - 2\operatorname{sen}\varphi}{1 + 2\operatorname{sen}\varphi}\right)^{e/2} \right\} + C$$

dove la costante di integrazione C può essere valutata con la condizione che risulti $q = 0^o$ per $\varphi = 0^o$, ed allora risulta $C = o$.

Confrontando la [59] con la [39] risultano le:

$$[61] \qquad m = r \qquad x^1 = q \qquad x^2 = \lambda \ .$$

Applicando le [61], tenendo conto delle [58] si perviene ad una terna di formule che permettono il trasporto dei parametri isometrici lungo un arco di geodetica sull'ellissoide terrestre.

Tali formule possono riuscire utili in talune questioni cartografiche quando, adottata la forma isoterma per il quadrato dell'elemento lineare si voglia operare sui parametri isometrici. È vero del resto che si potrebbe in questo caso effettuare il trasporto delle coordinate ellissoidiche e poi in base alla [60] determinare q, ma data la speciale forma analitica della [60] stessa, questa determinazione è sempre poco precisa se nei calcoli non si adoperano logaritmi a dieci cifre decimali.

Tenendo conto delle [61] si trovano facilmente le:

$$[62] \qquad \begin{aligned} m_1 &= - r \operatorname{sen} \varphi \\ m_{11} &= r \left\{ 1 - \frac{2 - e^2 (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \right\} \end{aligned}$$

e negli sviluppi trascurando $s^2 e^2$ il che è lecito per archi non maggiori di 200 km, si può alla m_{11} sostituire il valore approssinato:

$$[63] \qquad m_{11} = - r \cos 2 \varphi$$

ottenuta dalla precedente abbandonando e^2 .

Con questi risultati le formule per il trasporto delle coordinate isoterme sull'ellissoide terrestre, ottenute applicando le [58] arrestate ai termini del terzo ordine sono:

$$\begin{aligned} q_Q &= q_P + \frac{s}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \operatorname{sen} \varphi \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{s}{r}\right)^3 \left\{ (\operatorname{sen}^2 \varphi + 1) \cos^2 \theta - (5 \operatorname{sen}^2 \varphi + 1) \operatorname{sen}^2 \theta \right\} \cos \theta \\ \lambda_Q &= \lambda_P + \frac{s}{r} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2\theta + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{s}{r}\right)^3 \left\{ (2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 1) \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta \right\} \operatorname{sen} \theta \\ \theta_Q &= \theta_P + \frac{s}{r} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} \left(\frac{s}{r}\right)^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + 1) \operatorname{sen} 2 \theta \ . \end{aligned}$$

ove alle quantità r, φ, θ per semplicità di scrittura non si è apposto l'indice P.

8. – Per l'applicazione dei procedimenti esposti al caso dell'ellissoide a tre assi $a_1\ a_2\ a_3$ con $a_1 > a_2 > a_3$, notiamo che, con riferimento alle coordinate ellittiche, ponendo:

$$f(x) = \sum_1^3 {}_r \frac{y_r^2}{a_r^2 - x} - 1 , \tag{65}$$

l'equazione della superficie viene caratterizzata dalla $f(0) = 0$. Riducendo la f a forma di equazione algebrica, come è risaputo, essa risulta di terzo grado rispetto a x e le sue radici sono tutte reali e distinte. Una delle tre radici è $x = 0$, le altre due x^1 e x^2 soddisfano alle $a_3^2 < x^1 < a_2^2$, $a_2^2 < x^2 < a_1^2$.

Dal sistema $f(0) = 0$, $f(x^1) = 0$, $f(x^2) = 0$ considerato nelle tre incognite y_r $(r = 1, 2, 3)$, si traggono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_r = a_r^2 \dfrac{(a_r - x^1)(a_r - x^2)}{(a_r^2 - a_{r-1}^2)(a_r^2 - a_{r+1}^2)} \\ \qquad (r = 1, 2, 3) \end{array} \right. \tag{66}$$

che surrogano le [13] del § 1. Le y_r risultano così funzioni di x^1, x^2 e dei parametri ellissoidici a_r. Ritenendo le $x^1 = \text{cost.}$ $x^2 = \text{cost.}$ come curve coordinate, l'applicazione delle [12] porta alle:

$$a_{ii} = \frac{x^i (x^i - x^{i+1})}{4\, g(x^i)} \qquad a_{12} = a_{21} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{67}$$

ove:

$$g(x^i) = (a_1^2 - x^i)(a_2^2 - x^i)(a_3^2 - x^i) .$$

Il sistema x^1, x^2 risulta così formato dalle linee di curvatura della superficie ellissoidica.

Le [67] danno per il quadrato dell'elemento lineare la:

$$ds^2 = \frac{x^1 - x^2}{4} \left\{ \frac{x^1}{g(x^1)} (d x^1)^2 - \frac{x^2}{g(x^2)} (d x^2)^2 \right\} \tag{68}$$

e posto:

$$X_1 = \frac{x^1}{4} \qquad X_{11}^2 = \frac{x^1}{g(x^1)} \qquad X_2 = \frac{x^2}{4} \qquad X_{22}^2 = -\frac{x^2}{g(x^2)} \tag{69}$$

con $X_1\ X_{11}$ funzioni della sola x^1 e $X_2\ X_{22}$ funzioni della sola x^2, la [68] risulta della classica forma di Lionville:

$$ds^2 = (X_1 - X_2) \left\{ (X_{11}\, d x^1)^2 + (X_{22}\, d x^2)^2 \right\} \tag{70}$$

e si rientra così nel caso particolare trattato nel § 2.

Calcolando per questi particolari sistemi i coefficienti a tre indici di Christoffel e seguendo il procedimento esposto risulta possibile trovare le formule per il trasporto delle coordinate ellittiche sull'ellissoide a tre assi.

Cambiando i parametri x^i rispettivamente in x^i_1 definiti dalle:

$$x^i_1 = \int X_{ii}\, d x^i \tag{71}$$

si ottiene per l'ellissoide a tre assi la forma isoterma:

$$ds^2 = m \left\{ (d x^1_1)^2 + (d x^2_1)^2 \right\}. \tag{72}$$

Poichè gli integrali [71] sono della forma :

$$x^i_1 = \int \frac{\sqrt{x^i_1}}{\sqrt{(a^2_1 - x^i)\,(a^2_2 - x^i)\,(a^2_3 - x^i)}}\, d x^i \tag{73}$$

ritenendo l'ellissoide a tre assi, come grandezza, assimilabile a quello del corpo terrestre, tenuto conto altresì del campo di applicazione delle [64] arrestate ai termini del terzo ordine, potremo effettuare lo sviluppo in serie della radice indicata nel denominatore della frazione integranda arrestata ai termini del primo ordine in $\dfrac{x^i}{a^2_r}$. Effettuando tale sviluppo ed eseguendo la integrazione che ne risulta si perviene alle seguenti formule di passaggio dalle x^i alle x^i_1:

$$x^i_1 = \frac{\sqrt{x^i}^{\,3}}{a_1\, a_2\, a_3} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{a^2_1} + \frac{1}{a^2_2} + \frac{1}{a^2_3} \right) x^i \right\} + C \tag{74}$$

e se l'ellissoide considerato è molto prossimo a quello di rotazione terrestre, come lo è per esempio quello di Heiskanen, si potrà nello stesso ordine di approssimazione scrivere :

$$x^i_1 = \left(\frac{\sqrt{x^i}}{a} \right)^3 \left\{ \frac{2}{3} + \frac{6}{5} \frac{x^i}{a^2} \right\} + C \tag{75}$$

La costante di integrazione C si può determinare, per esempio, con la condizione che x^i_1 risulti nullo per x^i nullo; ne consegue così $C = O$.

L' m della [72] tenendo conto di quanto detto risulta funzione delle x^i_1 per il tramite di x^i. Nelle [64] il trasporto si fa lungo tali linee ed il calcolo si effettua ancora secondo quanto esposto nel § 2. I simboli a tre indici risultano alquanto semplificati perchè $a_{11} = a_{22}$.

Si osservi inoltre che se si suppone il punto P dato mediante le coordinate φ, λ, θ, allora sarà necessario passare con le φ, λ, θ, alle y_r ($r = 1, 2, 3$) mediante le seguenti :

$$[76] \qquad y_1 = a_1^2 \cos\varphi \cos\lambda : \Delta \qquad y_2 = a_2^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda : \Delta$$
$$y_3 = a_3^2 \operatorname{sen}\varphi : \Delta$$

con :

$$[77] \qquad \Delta = \sqrt{a_1^2 \cos^2\varphi \cos^2\lambda + a_2^2 \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\lambda + a_3^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$$

che sostituiscono le formule generali [13]. Con la $f(x) = O$ si trarranno le x^i $(i = 1, 2)$ e finalmente le x_1^i. Con queste si effettuerà il trasporto delle x_1^i nel punto Q. Si potrà allora eseguire il calcolo inverso e determinare le coordinate geografiche di Q. Questi calcoli però risultano particolarmente faticosi, sì che conviene per il trasporto delle coordinate geografiche sull'ellissoide a tre assi stabilire formule approssimate che tengano opportunamente conto dei particolari valori delle eccentricità.

Prof. Giovanni Boaga
Geodeta Capo dell'Istituto Geografico Militare