TEORIA DELLA BILANCIA DI TORSIONE

(*Continuazione : Vedi numero di Dicembre*).

§ 2. – LA BILANCIA DI TORSIONE DI EÖTVÖS.

a) Generalità.

Nel 1906 il Barone Rolando Eötvös, professore di fisica nella Università di Budapest, ideò un apparecchio da lui denominato *bilancia di torsione*, col quale è possibile determinare sperimentalmente le derivate U_{xy} , U_{xz} , U_{yz} e U_{Δ} e quindi risolvere gran parte dei problemi accennati al paragrafo precedente e di avere dati precisi circa la costituzione degli strati sottostanti alla superficie del suolo.

Lo strumento dell' Eötvös è stato modificato recentemente dallo Schweydar per conto della Casa costruttrice Askania–Werke di Berlino, in modo da rendere fotografica la registrazione delle osservazioni.

La Bilancia di Eötvös (I tipo, cioè quella costruita dall' Eötvös stesso) fondamentalmente è costituita da un'*asta di magnalio* lunga circa 40 cm. di forma parallelepipeda, denominata *ago*, sostenuta da un *filo di platino iridato* lungo una ottantina di centimetri, e che a sua volta porta ad una estremità un *filo di bronzo fosforato* al quale è sospeso un *pesetto di platino* e all'altra estremità un *contrappeso* atto ad equilibrare il pesetto di platino e il filo di bronzo fosforato (vedere figura schematica num. 2 più avanti riportata).

Le Bilance costruite generalmente sono doppie, ossia costituite da due aghi disposti parallelamente, con i fili di bronzo fosforato in direzioni opposte. I fili di platino contengono il 10 % di iridio ed hanno una sezione circolare del diametro di circa 4/100 di millimetro, mentre i fili di bronzo fosforato, lunghi circa 60 cm., pure di sezione circolare, hanno il diametro di circa 1/10 di millimetro.

I pesetti di platino sospesi ai fili di bronzo fosforato sono del peso di circa 30 grammi.

Speciali sistemi meccanici servono per bloccare gli aghi ed i pesetti durante il trasporto dello strumento.

I fili sono opportunamente protetti da tubi cilindrici di rame e di alluminio a doppia parete, allo scopo di impedire brusche variazioni di temperatura (vedi fig. 1).

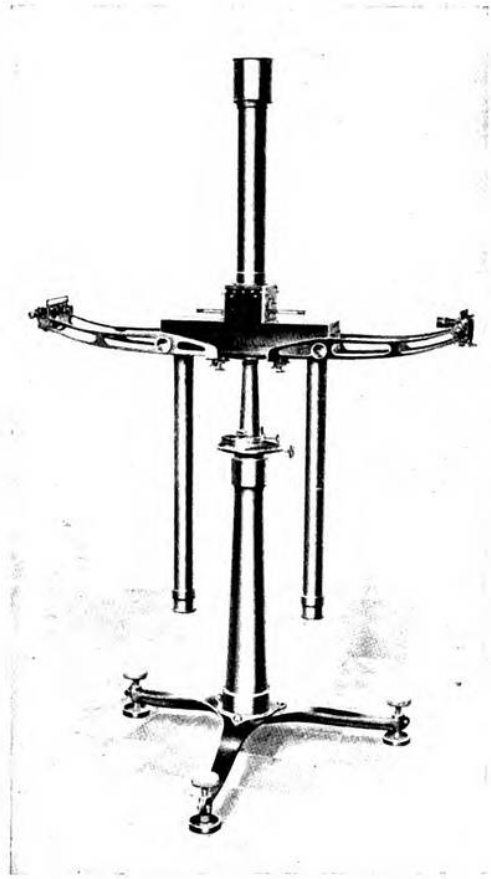

Fig. 1. - Bilancia di Eötvös.

Le masse note (sopra la superficie terrestre) e le ignote (sotto la superficie) in una data stazione, imprimono all'ago un leggero movimento rotatorio. Dopo una quarantina di minuti, per la resistenza del mezzo e per la torsione del filo (*f*) (ved. fig. 2), l'ago si arresta. Da questa posizione di arresto, ottenuta (per la ragione che vedremo) in cinque direzioni equidistanti angolarmente e di cui la prima diretta al Nord magnetico se la Bilancia ha un solo ago, ed in tre direzioni se la Bilancia è doppia, registrata con apposita scala mediante riflessione di raggi luminosi diretti allo specchio (*s*), introdotte nelle formule che stabiliremo in seguito, si possono calcolare le derivate seconde del potenziale U.

Queste derivate vengono riferite ad un sistema di assi trirettangolari topografici, e poi ridotte al sistema di riferimento geoidico ; entrambi questi sistemi si considerano con l'origine nel centro di massa dello strumento, che corrisponde al centro di gravità dell'ago, l'asse delle z disposto secondo la verticale, quello delle x, nel sistema topografico, nel piano orizzontale con direzione positiva verso il Nord magnetico e nel sistema geoidico verso il Nord geografico ; l'asse delle y, normale all'asse delle x, con direzione positiva verso l' Est.

Le derivate così ottenute, corrette dall'azione prodotta dalle masse sopra elevate (note) – *correzione topografica e correzione cartografica* – e dal *valore teorico* che esse assumerebbero nel punto stazione supposta la terra di densità omogenea – *valori normali* – danno le così dette *perturbazioni sotterranee*, le quali, escogitate alcune ipotesi sul modo di variazione della densità per gli strati sottostanti, permettono con appositi procedimenti matematici di fare delle induzioni circa configurazioni speciali sugli strati medesimi, sì che lo impiego della Bilancia viene consigliato nei problemi geofisici di prospezione del sottosuolo, per la ricerca di minerali pesanti o leggeri o di altre materie legate a speciali strutture geologiche (petroli).

Con i *valori corretti delle derivate* è possibile dedurre come è stato detto al paragrafo 1 :

a) *le componenti del vettore denominato gradiente gravimetrico, e quindi la sua intensità e la sua direzione, che nel piano orizzontale indica la posizione delle masse sottostanti di maggiore densità* ;

b) *le componenti della curvatura atta ad indicare il comportamento geometrico degli strati sotterranei, o meglio, gli scostamenti della superficie equipotenziale dalla figura sferica* ;

c) *le differenze fra le componenti verticali della gravità fra due stazioni collocate ad una distanza non superiore a 2 km.*

Quest'ultima ricerca in generale è assai interessante in quanto nota la gravità in un punto del campo di osservazione, si possono via via determinare le gravità in tutti gli altri punti stazione e quindi in un secondo tempo determinare le differenze fra le gravità osservate e quelle teoriche (anomalie) calcolate quest'ultime in funzione delle latitudini delle stazioni con qualcuna delle formule a tale uopo generalmente adottate: per esempio, quella di Helmert (1901) o quella internazionale (1930).

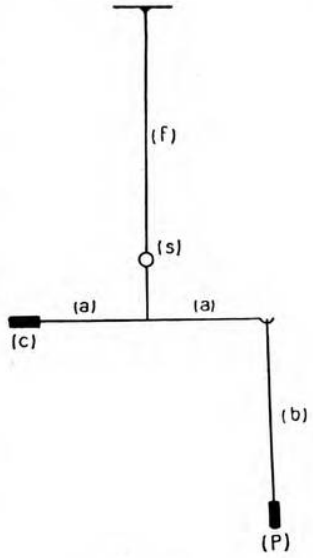

Fig. 2.

(*f*) = filo di platino iridato
(*a*) = ago
(*b*) = filo di bronzo fosforato
(*P*) = pesetto di platino
(*c*) = contappeso
(*s*) = specchio

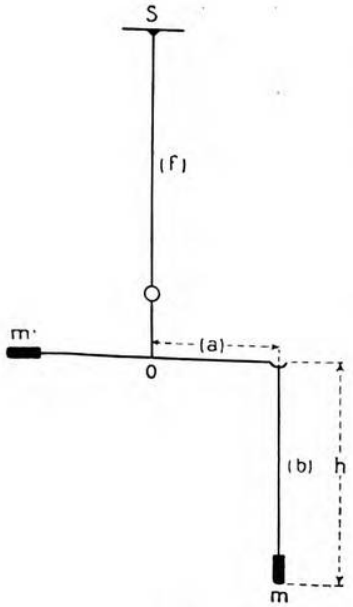

Fig. 3.

b) PRINCIPII TEORICI.

Come di consueto indichiamo con g_x, g_y, g_z, le componenti della gravità in un generico punto, prendendo come sistema trirettangolare di riferimento il sistema topografico dianzi ricordato con centro in O, baricentro dell'ago.

Per i punti vicini a O, come sono quelli della Bilancia, è lecito lo sviluppo in serie di Mac-Laurin delle componenti della gravità, limitate ai termini di primo ordine.

Con ciò si hanno le :

$$\begin{cases} g_x = g_x^0 + \\ \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 . x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 . y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 . z \\ \text{ed altre due analoghe per } g_y \text{ e } g_z . \end{cases}$$

Ricordando i risultati e le posizioni introdotte nel paragrafo 1, si ottiene la terna :

$$(1) \quad \begin{cases} g_x = U_{xx} . x + U_{xy} . y + U_{xz} . z \\ g_y = U_{xy} . x + U_{yy} . y + U_{yz} . z \\ g_z = U_{xz} . x + U_{yz} . y + U_{zz} . z + g. \end{cases}$$

È ovvio che il *campo della gravità* non è costante nei vari punti della Bilancia per cui vi sarà una *coppia* che tenderà a torcere il filo (*f*). Tenuto conto che per costruzione il *momento delle componenti verticali* è nullo, il *momento torcente* sarà espresso dalla :

$$F = \int (g_y \, . \, x - g_x \, . \, y) \, dm \tag{2}$$

e sostituendo in queste le (1) :

$$F = U_{xy} . \int (x^2 - y^2) \, dm - U_\Delta . \int x \, y \, dm + U_{yz} . \int x \, z \, dm - U_{xz} . \int y \, z \, dm. \tag{2'}$$

Per eseguire le integrazioni indicate notiamo che se con ξ indichiamo le distanze dei punti dell'apparato dal centro O contate lungo l'asse del giogo e con α l'angolo che questo fa coll'asse delle x, si ha :

$$x = \xi \cos \alpha \qquad\qquad y = \xi \operatorname{sen} \alpha.$$

I primi due integrali diventano allora :

$$\int (x^2 - y^2) \, . \, dm = \int (\xi^2 \cos^2 \alpha - \xi^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) \, . \, dm = \cos 2\alpha \int \xi^2 \, . \, dm = I \, . \, \cos 2\alpha$$

$$\int x \, y \, . \, dm = \int \xi \cos \alpha \, . \, \xi \operatorname{sen} \alpha \, . \, dm = 1/2 \operatorname{sen} 2\alpha \, . \int \xi^2 \, . \, dm = I/2 \, . \operatorname{sen} 2\alpha$$

essendo I il *momento di inerzia del giogo rispetto l'asse z.*

Per gli altri integrali notiamo che ad essi porta contributo soltanto la parte sospesa cioè la massa m del pesetto di platino attaccato al filo di bronzo fosforato, essendo per gli altri punti $z = O$. Così detta a, la lunghezza del braccio della Bilancia, h la lunghezza del filo (*b*), (vedere fig. 3) si hanno le :

$$\int x \, z \, . \, dm = a \, . \cos \alpha \int_o^h z \, . \, dm = a \, . \, h \, . \, m \, . \cos \alpha$$

$$\int y \, z \, . \, dm = a \, . \operatorname{sen} \alpha \int_o^h z \, . \, dm = a \, . \, h \, . \, m \, . \operatorname{sen} \alpha.$$

Le ultime due eguaglianze valgono con grande approssimazione essendo in pratica trascurabile la massa del filo (b).

Sostituendo questi risultati nella (2') si ha :

$$F = I \, . \, U_{xy} \cos 2\alpha - I/2 \, . \, U_\Delta \operatorname{sen} 2\alpha + a \, h \, m \, . \, U_{yz} \cos \alpha - a \, h \, m \, . \, U_{xz} \operatorname{sen} \alpha \, . \tag{3}$$

Dalla (3) risulta evidente che, ove riesca possibile misurare il *momento torcente* F per un conveniente numero di posizioni del braccio della Bilancia, sarà possibile determinare i valori di U_{xy}, U_Δ, U_{yz}, U_{xz} ritenendo le grandezze I e $a \, h \, m$ come quantità note (*costanti strumentali*).

Ciò effettivamente si riesce a realizzare seguendo l'uno o l'altro di due metodi denominati rispettivamente : *metodo statico* e *metodo dinamico*.

Il primo è quello che in pratica viene seguito nelle operazioni di campagna, mentre il secondo, come vedremo fra breve, si presenta particolarmente adatto ed utile, nella determinazione delle costanti strumentali e quindi per operazioni di laboratorio.

Per quanto concerne il *metodo statico*, messo in stazione lo strumento e liberato l'ago si attende che questo si metta in equilibrio : in tale condizione il momento F è equilibrato dalla torsione del filo $O\,S$ (vedi figura 3). Ora il detto filo porta uno specchietto (s) col quale, con l'aiuto di una scala graduata, è possibile mediante riflessione, leggere le ampiezze degli angoli di cui esso filo (f) ruota. Se con n_0 si indica la lettura corrispondente alla torsione nulla e con n quella corrispondente alla posizione di equilibrio, detto τ il coefficiente di torsione del filo e ω_0 , ω gli angoli corrispondenti di torsione, si avrà :

$$F = \tau\,(\omega - \omega_0) = \tau\left(\frac{n}{2\,D} - \frac{n_0}{2\,D}\right)$$

dove D rappresenta la distanza della scala graduata dallo specchio collegato al filo (f) ed espressa nelle medesime unità in cui è graduata la scala.

In base a ciò la (3) diviene :

$$(4)\qquad \frac{I}{\tau}\,D\,\cos 2\alpha\,.\,2\,U_{xy} - \frac{I}{\tau}\,D\,\operatorname{sen} 2\alpha\,.\,U_{\Delta} +$$

$$+\,\frac{2\,a\,h\,m}{\tau}\,D\,\cos\alpha\,.\,U_{yz} - \frac{2\,a\,h\,m}{\tau}\,D\,\operatorname{sen}\alpha\,U_{xz} + n_0 = n\,.$$

In questa equazione oltre alle quattro derivate eötvössiane è incognita anche la n_0 : eseguendo la determinazione di n in *cinque azimut* diversi α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , scendono dalla (4) cinque equazioni lineari indipendenti da cui è possibile avere le cinque incognite U_{xy} , U_{Δ} , U_{xz} , U_{yz} e n_0 semprechè ben inteso, siano noti i coefficienti che le accompagnano. Praticamente per $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$ si prendono i valori equidistanti 0^o, 72^o, 144^o, 216^o, 288^o.

Per il *metodo dinamico* si noti che se l'ago viene ruotato di un angolo φ diverso dalla posizione di equilibrio α si forma una *coppia acceleratrice* K in virtù della quale l'ago tende a ruotare attorno alla posizione di equilibrio. L'equazione differenziale di questo moto è notoriamente :

$$(5)\qquad \frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = \frac{K}{I}\,.$$

La coppia K, prescindendo dalla *resistenza dell'aria*, si compone di due parti :

a) *l'azione delle componenti orizzontali della gravità* che avrà una espressione del tipo $F\,(\varphi) - F\,(\alpha)$ dove F è la funzione definita dalla (3) ;

b) *la ulteriore torsione del filo* $\tau\,(\varphi - \alpha)$ che si oppone evidentemente all'azione precedente e quindi andrà presa in senso negativo.

Si avrà adunque in definitiva:

$$K = F(\varphi) - F(\alpha) - \tau(\varphi - \alpha). \tag{5'}$$

Per spostamenti molto piccoli, come avviene in pratica, è lecito porre

$$F(\varphi) = F(\alpha) + (\varphi - \alpha) \cdot F'(\alpha) \tag{5''}$$

e sostituendo questa nella (5') e ricordando che $F(\alpha) = \tau(\omega - \omega_0)$ dove ω è l'angolo alla posizione di equilibrio a cui corrisponde la lettura n, risultando inoltre:

$$\frac{d\,F(\alpha)}{d\,\alpha} = \tau\,\frac{d\,\omega}{d\,\alpha}$$

si ha:

$$K = -\tau(\varphi - \alpha)\left\{1 - \frac{d\,\omega}{d\,\alpha}\right\}$$

ed in definitiva la (5) può scriversi:

$$\frac{d^2(\varphi - \alpha)}{d\,t^2} + \frac{\tau}{I}\left\{1 - \frac{d\,\omega}{d\,\alpha}\right\}(\varphi - \alpha) = O \tag{6}$$

la quale è l'*equazione differenziale di un moto armonico di periodo*:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{I}{\tau\left(1 - \frac{d\,\omega}{d\,\alpha}\right)}}\,. \tag{7}$$

Se non esistesse l'azione delle componenti orizzontali della gravità, il periodo delle oscillazioni sarebbe:

$$T_0 = 2\,\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}\,. \tag{7'}$$

Tenuto conto di questo risultato la (7) fornisce la:

$$\frac{4\,\pi^2}{T^2} = \frac{4\,\pi^2}{T_0^2} - \frac{\tau}{I}\,\frac{d\,\omega}{d\,\alpha} \tag{7''}$$

e sostituendo a ω la espressione (4), poichè $\frac{d\,\omega}{d\,\alpha} = \frac{1}{2\,D}\,\frac{d\,n}{d\,\alpha}$ si ottiene:

$$\frac{4\,\pi^2}{T^2} = \frac{4\,\pi^2}{T_0^2} - \frac{\tau}{I}\left\{-\frac{I}{\tau}(\operatorname{sen} 2\alpha)\,2\,U_{xy} - \frac{I}{\tau}(\cos 2\alpha)\,U_{\Delta} - \right.$$
$$\left. - \frac{h\,a\,m}{\tau}\operatorname{sen}\alpha \cdot U_{yz} - \frac{h\,a\,m}{\tau}\cos\alpha \cdot U_{xz}\right\}$$

ossia :

$$(8) \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} + 2 \operatorname{sen} 2\alpha\, U_{xy} + \cos 2\alpha\, U_\Delta + \frac{h\,a\,m}{I} \operatorname{sen} \alpha\, U_{yz} + \frac{h\,a\,m}{I} \cos \alpha\, U_{xz} .$$

Questa formula consente la ricerca delle quattro derivate con la osservazione del periodo T *di oscillazione, in cinque azimut, in quanto si considera incognita anche la quantità* $4\pi^2 / T_0^2$.

Osserviamo che questa quantità è una costante strumentale perchè dalla (7′) risulta :

$$(9) \qquad \frac{I}{\tau} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} .$$

c) Determinazione delle costanti strumentali.

Se nella Bilancia esaminata si sopprime il filo (*b*) ed alla estremità dell'ago si colloca la massa *m* del pesetto di platino, si ottiene una Bilancia del tipo indicati nella figura 4 : è evidente allora che la (8) si semplifica in quanto *h* risulta nulla ; in questo caso :

$$(9') \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} + 2 \operatorname{sen} 2\alpha\, U_{xy} + \cos 2\alpha\, U_\Delta .$$

con questa, o con l'analoga che discende dalla (4), si vede che con una siffatta Bilancia si può soltanto calcolare le U_{xy} e U_Δ.

La (9′) si presta assai bene al calcolo della costante strumentale :

$$\frac{I}{\tau} .$$

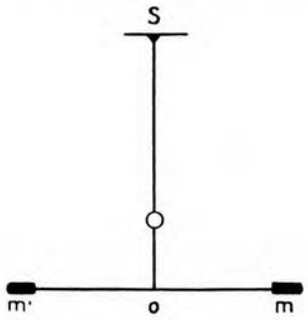

Fig. 4.

Per ottenere ciò, basta porre la Bilancia nelle due posizioni α ed $\alpha + 90^o$. Per la prima posizione si ha la (9′) ; per la seconda, essendo :

$$\operatorname{sen} 2(\alpha + 90^o) = \operatorname{sen}(2\alpha + 180^o) = -\operatorname{sen} 2\alpha$$
$$\cos 2(\alpha + 90^o) = \cos(2\alpha + 180^o) = -\cos 2\alpha$$

si ha la :

$$(9'') \qquad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - 2 \operatorname{sen} 2\alpha\, U_{xy} - \cos 2\alpha\, U_\Delta .$$

Indicando con T_1 e T_2 i periodi corrispondenti alle (9′) e (9″), e addizionando, si ha subito:

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4\pi^2}{T_1^2} + \frac{4\pi^2}{T_2^2}\right\} = \frac{\tau}{I} \tag{10}$$

e quindi, come si è detto, la possibilità di determinare $\frac{\tau}{I}$ e conseguentemente $\frac{I}{\tau}$.

Stabilito il valore del rapporto $\frac{I}{\tau}$ rimane da determinare τ, determinazione necessaria specialmente quando per rottura va cambiato il filo (f).

Per questa determinazione si fa la lettura quando la Bilancia ha assunto la sua posizione di equilibrio, indi si colloca nel piano orizzontale passante per il centro della massa m del pesetto di platino e ad una distanza Δ da esso e computata lungo la normale al piano ago–filo di bronzo fosforato, una massa M di piombo di circa 10 kg. Si fa una nuova lettura, indi si colloca la massa M, ancora alla distanza Δ in posizione simmetrica rispetto la massa m, sempre sul dianzi detto piano orizzontale e si fa una nuova lettura; si allontana la massa M, si attende che la Bilancia acquisti la posizione di equilibrio e si fa una quarta lettura.

Se con n si indica ora il numero di divisione della scala tra due posizioni estreme il *momento di rotazione della forza* $\varepsilon \frac{M\,m}{\Delta^2} \cdot x$ con x un *coefficiente di correzione*, dipendente dalla forma e dimensioni di m, sarà dato da:

$$\varepsilon \frac{M\,m}{\Delta^2} \cdot a \cdot x \tag{11′}$$

e quindi per il valore di n, se la scala è alla distanza D dallo specchio, $\frac{n}{2D}$ essendo l'angolo di torsione, si avrà:

$$\tau \frac{n}{2D} = 2\varepsilon \frac{M\,m}{\Delta^2} \cdot a \cdot x \tag{11}$$

da cui si ricava il valore di τ.

Noto τ risulta subito in base alla (10) la possibilità di determinare I, che non muta con la rottura del filo (f) e conseguentemente il valore della costante

$$\frac{2h \cdot m \cdot a \cdot D}{I}$$

in quanto h, m, a, D sono direttamente misurabili.

Circa il coefficiente x ora introdotto notiamo che se con σ indichiamo la densità del cilindretto, con s la sua sezione, la *massa elementare* viene data dalla :

$$d\,m = \sigma\, s\, .\, d\,\lambda$$

e posto :

$$r = \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$$

la *forza elementare* nel punto P di massa unitaria sarà :

$$d\,f = \varepsilon\, \frac{\sigma\, .\, s\, .\, d\,\lambda}{r^2}$$

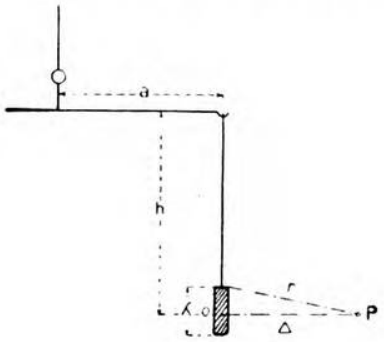

Fig. 5.

e nella direzione $O\,P$:

$$d\,f_1 = \varepsilon\, \frac{\sigma\, s\, d\,\lambda}{r^2}\, .\, \frac{\Delta}{r}$$

che integrata dà :

$$f_1 = \varepsilon\, \sigma\, s \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{\Delta}{r^3}\, d\,\lambda$$

e moltiplicando i due membri per Δ :

$$f_1\, .\, \Delta = \varepsilon\, \sigma\, s \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \frac{\Delta^2}{r^3} d\,\lambda = \varepsilon\, \sigma\, s \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \frac{r^2 - \lambda^2/4}{r^3}\, d\,\lambda =$$

$$= \varepsilon\, \sigma\, s \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda^2}{4\, r^3}\right) d\,\lambda$$

e poichè :

$$d\,\frac{\lambda}{r} = \frac{r\, d\,\lambda - \lambda\, d\, r}{r^2}$$

e ricordando il valore di r :

$$d\, r = \frac{1}{2\sqrt{\Delta^2 + \lambda^2/4}}\, .\, 1/4\, .\, 2\,\lambda\, .\, d\,\lambda = \frac{\lambda\, d\,\lambda}{4\, r}$$

perciò :

$$d\,\lambda/r = \frac{r\, d\,\lambda}{r^2} - \frac{\lambda^2}{4\, r^3}\, .\, d\,\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda^2}{4\, r^3}\right) d\,\lambda$$

e ne consegue per la precedente :

$$f_1\, .\, \Delta = \varepsilon\, \sigma\, s \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} d\,\lambda/r = \varepsilon\, \sigma\, s \left[\frac{\lambda}{r}\right]_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} = \varepsilon\, \sigma\, s \left(\frac{\lambda}{2\, r} + \frac{\lambda}{2\, r}\right)$$

(essendo $m = \lambda\,\sigma\,s$) e quindi, dividendo i due membri per Δ:

$$f_1 = \varepsilon\,\frac{m}{r\,\Delta} = \varepsilon\,\frac{m}{\Delta\sqrt{\Delta^2 + \lambda^2/4}}$$

ma la massa in P anzichè unitaria è M, dunque:

$$F = \varepsilon\,\frac{M\,m}{\Delta^2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\,\Delta^2}}}$$

e posto:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4\,\Delta^2}}}$$

si ha la forza il cui momento è dato dalla (11').

Per avere una idea circa l'ordine di grandezza di queste quantità, ricordiamo che l' Eötvös posto $\varepsilon = 66{,}6 \cdot 10^{-9}$, $M = 13137$ gr., $m = 25{,}43$ gr., $\Delta = 11{,}01$ cm., $a = 20$ cm., $h = 56{,}6$ cm., $n = 34{,}5$ parti, $D = 1232$ parti trovò:

$$\tau = 0{,}5035.$$

Facendo oscillare il braccio della bilancia nelle due posizioni ortogonali per la stessa bilancia trovò:

$$T_1 = 644{,}51 \text{ sec.} \qquad T_2 = 641{,}57 \text{ sec.}$$

da cui risultò:

$$\frac{I}{\tau} = 41886.$$

Le Bilance moderne sono delle medesime dimensioni della Bilancia I° tipo costruita dall' Eötvös, sicchè le costanti di queste nuove Bilance risultano dello stesso ordine di grandezza.

d) Determinazione di n_0.

Ritornando alla formula (4) potremo scrivere la stessa (indicando con a e b due costanti – costanti strumentali – definite dalle:

$$a = \frac{I}{\tau}\,.\,D \qquad b = \frac{2\,.\,h\,.\,a\,.\,m}{\tau}\,.\,D$$

dove l' a messo in evidenza in b rappresenta la lunghezza dell'ago) sotto forma:

(4') $$n - n_0 = 2\,a\,U_{xy}\cos 2\alpha - a\,U_\Delta \operatorname{sen} 2\alpha + b\,U_{yz}\cos\alpha - b\,U_{xz}\operatorname{sen}\alpha.$$

Ponendo per α successivamente i valori $\alpha_1 = 0^0$, $\alpha_2 = 72^0$, $\alpha_3 = 144^0$, $\alpha_4 = 216^0$, $\alpha_5 = 288^0$ si possono scrivere cinque equazioni del tipo (4') le quali addizionate membro a membro danno la :

$$n_1 - n_0 + n_2 - n_0 + n_3 - n_0 + n_4 - n_0 + n_5 - n_0 = 0$$

e conseguentemente :

$$n_0 = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5}{5} \quad .$$

Eliminato mediante la precedente n_0 dal sistema (4') si può determinare i valori delle quattro derivate U_{xy}, U_Δ, U_{yz}, U_{xz} ; si conclude così che : *tale determinazione è possibile facendo le osservazioni in cinque azimut e disponendo dapprima l'ago in modo che il pesetto di platino sia nella direzione Nord e gli altri angolarmente equidistanti e contati nella direzione destrorsa.*

e) BILANCIA DOPPIA.

Se si accoppiano due Bilance, come nella figura accanto, allora si dispone la massa m del primo ago (I) nella direzione Nord, volendo collocare, come suol dirsi la Bilancia in stazione, ed essenso montati gli aghi delle due Bilance parallelamente, ne risulta che la massa del secondo ago viene a trovarsi nella direzione Sud. Con questo dispositivo si vengono a determinare le derivate seconde del potenziale, osservando solo in tre azimut.

Indicando con apici le quantità riferentisi alla seconda Bilancia, avremo per i tre azimut α della prima ($\alpha_1 = 0^0$, $\alpha_2 = 120^0$, $\alpha_3 = 240^0$) rispettivamente i gruppi di formule che discendono dalla (4').

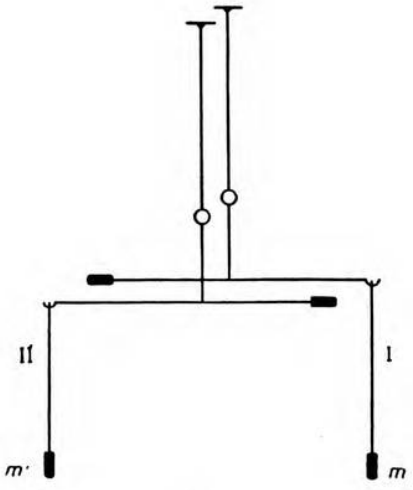

Fig. 6.

I Gruppo
$$\begin{cases} n_1 - n_0 = 2\,a\,U_{xy} + b\,U_{yz} \\ n'_1 - n'_0 = 2\,a'\,U_{xy} - b'\,U_{yz} \end{cases}$$

II Gruppo
$$\begin{cases} n_2 - n_0 = +\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\,U_\Delta - a\,U_{xy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,b\,U_{xz} - \frac{b}{2}\,U_{yz} \\ \text{ed una analoga con gli apici sulle quantità, } n,\ a,\ b \text{ con segni cambiati negli ultimi due addendi} \end{cases}$$

III Gruppo
$$\begin{cases} n_3 - n_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} a U_\Delta - a U_{xy} + \frac{\sqrt{3}}{2} b U_{xz} - \frac{b}{2} U_{yz} \\ \text{ed una analoga con gli apici sulle quantità } n, a, b, \text{ con segni cambiati negli ultimi due addendi.} \end{cases}$$

Addizionando membro a membro prima le prime due relazioni dei tre gruppi e poi le seconde, avremo:

$$\begin{cases} n_1 - n_0 + n_2 - n_0 + n_3 - n_0 = 0 \\ n'_1 - n'_0 + n'_2 - n'_0 + n'_3 - n'_0 = 0 \end{cases}$$

dalle quali *è possibile avere* n_0 *e* n'_0 *come media delle tre letture* $n_1\, n_2\, n_3$ e $n_1'\, n_2'\, n_3$ *rispettivamente.*

Indicando con:

$$d_1\,,\ d_2\,,\ d_3 \qquad\qquad d_1', d_2', d_3'$$

le differenze:

$$(n_1 - n_0),\ (n_2 - n_0),\ (n_3 - n_0)\,;\ (n_1' - n_0'),\ (n_2' - n_0'),\ (n_3' - n_0')$$

che entrano nei gruppi accennati, l' Eötvös ricava, da tali gruppi, tre gruppi di formule per la determinazione delle derivate seconde, nei secondi membri delle quali entrano, combinate due a due le quantità $d_1\,,\ d_2\,,\ d_3$ e le analoghe d_1', d_2', d_3' che possono considerarsi note in virtù delle osservazioni.

Tali gruppi di formule sono:

I GRUPPO CONTENENTE d_2 E d_3:

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a'}{a'\,b + a\,b'} \left[(d_2 - d_3) - a/a' \,(d_2' - d_3') \right]$$

$$U_{yz} = \frac{a'}{a'\,b + a\,b'} \left[(d_2 + d_3) - a/a' \,(d_2' + d_3') \right]$$

$$U_\Delta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b'}{a\,b' + a\,b'} \left[(d_2 - d_3) + b/b' \,(d_2' - d_3') \right]$$

$$U_{xy} = \frac{1}{2} \frac{b'}{a'\,b + a\,b'} \left[(d_2 + d_3) + b/b' \,(d_2' + d_3') \right]$$

II GRUPPO CONTENENTE d_3 E d_1:

$$U_{yz} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a'}{a'\,b + a\,b'} \left[(2\,d_3 + d_1) - a/a' \,(2\,d'_3 + d_1') \right]$$

$$U_{yz} = - \frac{a'}{a' b + a b'} \left[d_1 - a/a' \, d_1' \right]$$

$$U_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b'}{a b' + a' b} \left[(2 d_3 + d_1) + b/b' (2 d_3' + d_1') \right]$$

$$U_{xy} = - \frac{1}{2} \frac{b'}{a b' + a' b} \left[d_1 + b/b' \, d_1' \right].$$

III GRUPPO CONTENENTE d_2 E d_1 :

$$U_{xz} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a'}{a' b + b' a} \left[(2 d_2 + d_1) - a/a' (2 d_2' + d_1') \right]$$

$$U_{yz} = - \frac{a'}{a' b + a b'} \left[d_1 - a/a' \, d_1' \right]$$

$$U_{\Delta} = - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b'}{a' b + a b'} \left[(2 d_2 + d_1) + b/b' (2 d_2' + d_1') \right]$$

$$U_{xy} = - \frac{1}{2} \frac{b'}{a b' + a' b} \left[d_1 + b/b' \, d_1' \right].$$

f) MODALITÀ OSSERVATIVE.

Per la Bilancia del I tipo costruita dal meccanico Süss di Budapest sotto la direzione dello stesso Eötvös per conto dell' Istituto Geodetico della R. Università di Padova, i valori dei coefficienti introdotti nei gruppi di formule ora ricordate sono degli importi :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a'}{a' b + a b'} = 1{,}575 . 10^{-9} \qquad a/a' = 1{,}0053 = 1 + 0{,}0053$$

$$\frac{a'}{a' b + a b'} = 2{,}727 . 10^{-9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b'}{a b' + a' b} = 5{,}022 . 10^{-9} \qquad b/b' = 1{,}0116 = 1 + 0{,}0116$$

$$\frac{1}{2} \frac{b'}{a b' + a' b} = 4{,}349 . 10^{-9}$$

Le derivate vengono così determinate in unità eötvössiane: (un Eötvös $= 1.10^{-9}$ (*c. g. s.*) e si indica con la lettera *E*).

Dalle formule scritte si vede che a rigore basterebbe fare in ogni punto stazione una serie sola di tre azimut per ricavare U_{xy} U_{Δ} come medie di *tre* valori distinti e U_{yz} e U_{xz} come medie di *due* valori distinti in quanto la seconda e quarta eguaglianza del II gruppo sono identiche alla seconda e quarta del III gruppo. Tuttavia nelle stazioni si ripetono le serie di letture in tre azimut, possibilmente quattro volte ed eseguendo le letture di ora in ora essendo questo il tempo necessario perchè gli aghi si arrestino nella loro posizione di equilibrio dopo che l'osservatore, fatta la lettura, abbia spostato gli aghi da una posizione alla successiva.

Per il calcolo numerico l' Eötvös consiglia di terminare volta a volta l' n_0 come media di tre letture in tre azimut o della stessa serie o di una serie concatenata alla successiva. Per esempio, indicando con numeri romani le letture in tre azimut e con indici il numero delle serie cui appartengono, le determiterminazioni degli n_0 si farebbero mediante le letture:

$$I_1\ II_1\ III_1\ ;\quad II_1\ III_1\ I_2\ ;\quad III_1\ I_2\ II_2\ ;\quad \text{ecc.}$$

Nei gruppi di formule precedenti si introducono allora volta a volta le differenze tra un n_0 così determinato ed una delle letture cui proviene.

Per rendere più chiaro quanto detto riportiamo le osservazioni in tre azimut eseguite dal Prof. Soler all' Istituto di Geodesia di Padova con la Bilancia accennata:

data (1911)	*ora*	*azimut*	n	n_0	$n-n_0$	n'	n'_0	$n'-n'_0$
29 febbraio	15	I	151,6			450,8		
	16	II	163,6	152,63	+ 10,79	488,2	445,73	+ 2,47
	17	III	142,7	,73	— 10,03	438,2	,80	— 7,60
1° marzo	19	I	151,9	,77	— 0,87	451,0	,80	+ 5,20
	12	II	163,7	,80	+ 10,90	448,2	,80	+ 2,40
	13	III	142,8	,50	— 10,00	438,2	,80	— 7,60
	15	I	151,9	,80	— 0,90	451,0	,80	+ 5,17
	16	II	163,7	,77	+ 10,93	448,3	,80	+ 2,50
	17	III	142,7	,77	— 10,07	438,1	,83	— 7,73
2 marzo	14	I	151,9	7,7	— 0,87	451,1	,83	+ 5,27
	15	II	163,7	,77	+ 10,93	448,3	,80	+ 2,50
	16	III	142,7			438,0		

Le $n - n_0$ risultano da ciascuna n_0 diminuita dalla n che le sta a sinistra e che rappresenta la lettura direttamente fatta o corretta se necessario, per la temperatura. Con i valori inseriti nelle colonne $n - n_0$ e $n' - n_0'$ si vengono ad avere *nove* valori distinti per U_{xy} e U_Δ e *sei* valori distinti per U_{yz} e U_{xz}, provenienti dalle osservazioni concatenate.

Si ha così la possibilità di ottenere i valori delle varie derivate come *medie* di più valori calcolati col metodo indicato e quindi per ogni valore medio è possibile dedurre *l'errore della media* e avere così un indice circa l'attendibilità dei valori ricavati.

Con la Bilancia accennata gli errori medi delle varie derivate, da numerosissime stazioni fatte dal Soler all' Istituto di Geodesia di Padova ed in campagna, risultano mediamente, in unità eötvössiane, degli importi:

$$m_{xy} = \pm 1{,}00\ E \qquad m_{xz} = \pm 1{,}00\ E \qquad m_\Delta = \pm 2{,}00\ E \qquad m_{xy} = \pm 1{,}00\ E\,.$$

Per le letture, nella Bilancia accennata, una *scala* segnata su un piano riflettente sostenuta da un apposito supporto va sistemata in modo che la faccia graduata sia disposta di fronte allo specchietto del filo di platino iridato, ad una distanza D di circa 60 cm. Normalmente alla faccia graduata della scala viene montato un cannocchialetto con l'asse normale a detta faccia e con l'obbiettivo diretto allo specchio. Al momento della lettura lo osservatore illumina la scala e la graduazione per riflessione segue il percorso indicato dalle freccie nella figura annessa; l'osservatore collocato in O può fare la lettura in corrispondenza di un filo verticale segnato sul reticolo del cannocchiale.

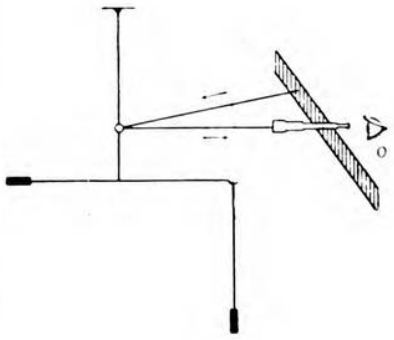

Fig. 7.

g) Bilancia fotografica, grande modello Eötvös–Schweydar.

Nelle Bilance moderne la registrazione avviene fotograficamente nel seguente modo: in L c' è una sorgente luminosa (lampadina elettrica a 4 Volta) davanti alla sorgente luminosa è collocato uno schermo avente nel centro un piccolo foro F. Da questo foro esce un fascio luminoso molto sottile il quale va ad incidere su uno specchio che devia il raggio luminoso di 90° circa ed ha l'ufficio di dirigere il raggio luminoso al prisma di cristallo P. Tale prisma è regolato in modo che il raggio luminoso è diretto allo specchietto s collegato al filo di platino iridato. Questo specchio s riflette il raggio luminoso che ritorna al prisma P, il quale devia di circa un angolo retto il raggio e lo dirige verso la parte superiore della Bilancia dove è sistemata una lastra fotografica che resta impressionata. La lampadina rimane accesa circa un minuto, tempo necessario per

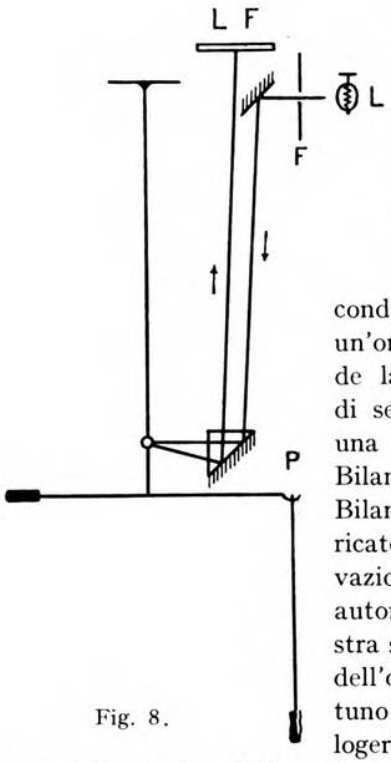

Fig. 8.

impressionare la lastra, dopo di che essendo la Bilancia provveduta da un congegno di orologeria e di un motorino, l'orologio mette in azione il motorino e la Bilancia si sposta automaticamente e va nel secondo azimut, seconda posizione ; dopo un'ora l'orologio riaccende la lampadina, e così di seguito. Per tal modo una volta sistemata la Bilancia, cioè messa la Bilancia in stazione e caricato l'orologio, le osservazioni vengono segnate automaticamente sulla lastra senza più l'intervento dell'operatore. Un opportuno congegno pure di orologeria (vedi fig. 9 e 11) pensa poi a spostare la lastra fotografica di tre millimetri, in modo che ad ogni ora vengono impressionate zone di lastre fotografiche dell'ampiezza di tre millimetri.

Fig. 9.
Bilancia Eötvös-Schweydar.

Sviluppando la lastra si trovano dei punti neri come quelli segnati nella figura 10. I punti *P* della prima colonna sono punti fissi di riferimento. I punti della colonna I sono i punti corrispondenti al primo ago, quelli della colonna II, al secondo ago. Infine quelli della colonna *T* rappresentano la temperatura, o meglio la variazione di temperatura durante le osservazioni.

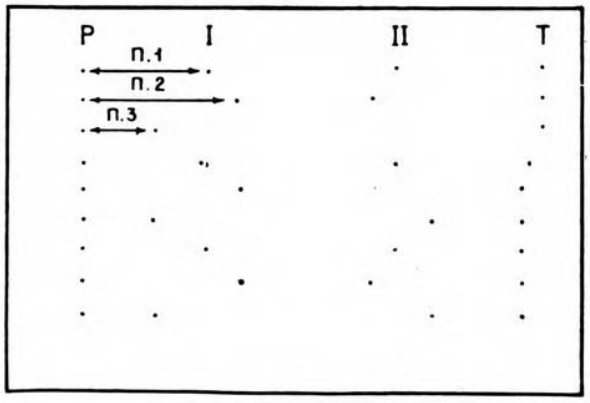

Fig. 10.

Le distanze, computate su apposita scala dei punti I dai punti fissi forniscono le n_1 , n_2 , n_3 ; analogamente dicasi per le n_1', n_2', n_3'. La distanza dei punti *T* dànno invece le variazioni di temperatura. Le letture *n* prima di introdurle nelle formule accennate vanno corrette per la variazione di temperatura

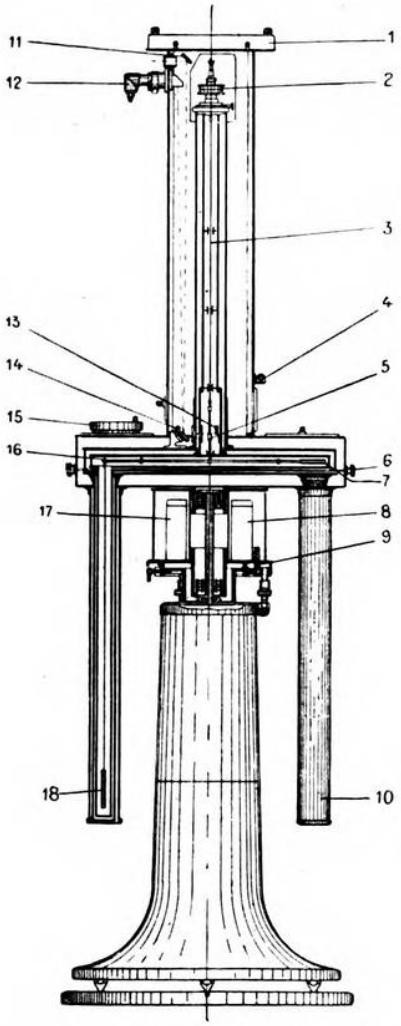

Fig. 11. – Bilancia Eötvös-Schweydar. (grande modello)

1, lastra fotografica; 2, vite di torsione; 3, filo di platino iridato; 4, livella cilindrica; 5, specchio; 6, dispositivo d'arresto; 7, contrappeso; 8, meccanismo motore; 9, circolo dentato; 10, recipiente di protezione; 11, specchio intercettore; 12, lampadina elettrica; 13, specchio fisso; 14, specchio a supposto o prisma; 15, declinatore magnetico; 16, ago; 17, meccanismo di contatto; 18, peso di platino.

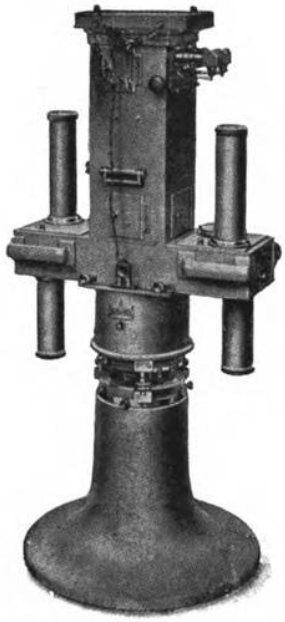

Fig. 12. – Bilancia tipo « Z ».

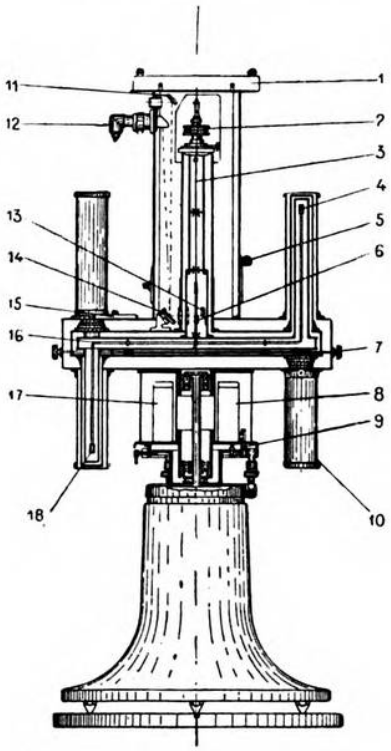

Fig. 13. – Bilancia tipo « Z ».

da una temperatura media (20 gradi). Questa correzione si calcola moltiplicando n per opportuna costante. Nelle Bilance moderne tale correzione è praticamente nulla anche per variazioni di parecchi gradi di temperatura, cosicchè si introducono nelle formule citate senz'altro i dati ricavati dalla lastra fotografica del consueto formato 6 ½.9.

Ciò risulta dal valore del coefficiente τ di torsione in funzione della temperatura ; si ha per esempio per la Bilancia n^0 150 della Askania Werke, per il primo ago :

$$\tau = 0{,}573 \left\{ 1 + 0{,}0010\ (t^0 - 20^0) \right\} .$$

Desiderando si possono fare visualmente le letture, senza impressionare la *L F* (vedi fig. 11 e 13). In tal caso è necessario deviare i raggi luminosi mediante lo specchio 11 e dirigerli ad una scala graduata su vetro trasparente sistemata al disopra delle lampadine 12. (Vedi fig. 11 e 13).

h) Altri tipi di Bilance.

La Bilancia a registrazione fotografica di cui ora abbiamo fatto cenno è la Bilancia grande modello costruita dalla AskaniaWerke di Berlino. Questa ditta oltre al tipo accennato costruisce altre due specie di Bilance : una denominata *tipo Z* e l'altra ad *ago inclinato* (vedi figg. 14 e 15).

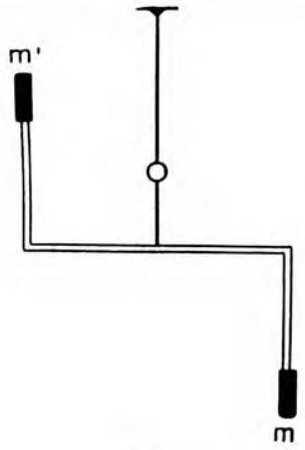

Fig. 14.

Anche nella *Bilancia tipo Z* si hanno due aghi collocati alla distanza angolare l'un dall'altro di 180° ; ciascuno dei due aghi sono costruiti a forma di *z*, da cui il nome dato alla Bilancia. Il tratto (vedi figura) è tutto di un pezzo, metallico, con due masse agli estremi. La teoria che abbiamo dianzi esposta non varia in quanto il risultato è quello che si ottiene per due masse m ed m' collocate a livello diverso.

Anche le *Bilance ad ago inclinato* sono provviste di due aghi disposti a 180° uno dall'altro. Il braccio inclinato porta agli estremi le due masse e la sospensione è ottenuta pel tramite di un doppio filo di seta. L'inclinazione del braccio elimina nei tubi di ricoprimento angoli morti che danno sempre correnti di convezione e che perciò fanno assumere agli aghi le posizioni di equilibrio con ritardo.

Con questo tipo di Bilancia secondo esperienze eseguite da Roessiger è più sollecitato lo smorzamento delle oscillazioni per il fatto che esse non si propagano al filo di torsione. Con tale Bilancia la posizione di equilibrio degli aghi si ottiene dopo una ventina di minuti.

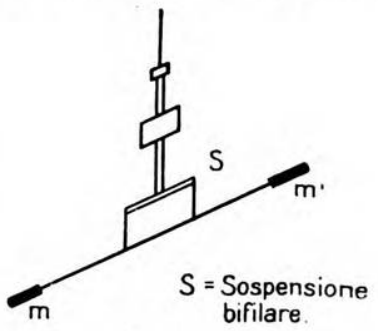

Fig. 15.

Il geodeta Haalk dell' Istituto Geodetico di Potsdam ha proposto la costruzione di Bilance Eötvös-Schweydar con due aghi equidistanti angolarmente di 90°, e con quattro aghi a due a due uniti come nella Bilancia di Eötvös I tipo e ciascuna coppia disposta rispetto l'altra ad angolo retto.

i) DELLE CORREZIONI DELLE DERIVATE SECONDE RICAVATE DALLE INDICAZIONI DELLA BILANCIA.

Come abbiamo fatto cenno al § 1 ai valori forniti dalle osservazioni si devono apportare delle correzioni: la prima è quella *topografica*, che si effettua come la correzione topografica per le misure gravimetriche pendolari. Si scompone il terreno circostante la stazione in settori circolari e settori di corone circolari con raggi progressivi dei seguenti importi:

0,60 m; 1,00 m; 1,50 m; 2,00 m; 3,00 m; 5 m; 10 m; 20 m; 30 m; 40 m; 50 m; 70 m; 100 m.

Il primo punto battuto si prende nella direzione Nord e poi successivamente alle distanze angolari di 45° nel verso Nord-Est-Sud-Ovest-Nord.

Le differenze di livello nelle vicinanze della stazione fra il punto stazione ed i vari punti dei cerchi si determinano con i triplometri, nei punti più lontani con un livello o con un tacheometro. Denotate con h_i ($i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) queste differenze di livello, le correzioni per le varie derivate sono del tipo:

$$\Delta' U_{yz} = c \left\{ (h_1 - h_5) + 0{,}707 \left[(h_2 - h_6) - (h_4 - h_8) \right] \right\}$$

$$\Delta' U_{xz} = c \left\{ (h_3 - h_7) + 0{,}707 \left[(h_2 - h_6) - (h_4 - h_8) \right] \right\}$$

$$\Delta' U_{\Delta} = c' \left\{ (h_1 + h_5) - (h_3 + h_7) \right\}$$

$$\Delta' U_{xy} = c' \left\{ (h_2 + h_6) - (h_4 + h_8) \right\}$$

che si determinano con procedimento simile a quello che si segue per le correzioni topografiche per le misure pendolari. I coefficienti c e c' variano da cerchio a cerchio; per i vari cerchi essi assumono i valori:

cerchio di raggio	c	c'	*cerchio di raggio*	c	c'
0,6 m	0,2	0,1	20 m.	0,004	0,09
1,0 »	0,25	0,2	30 »	,001	,04
1,5 »	0,2	0,25	40 »	,0005	,02
2,0 »	0,1	0,25	50 »	,0003	,017
3,0 »	0,1	0,2	70 »	,0002	,015
5,0 »	0,06	0,33	100 »	,0001	,012
10,0 »	0,02	0,21			

Essi sono stati determinati assumendo per densità del terreno il valore 1,8 ; se la densità fosse diversa da 1,8, per esempio di densità generica σ, sarebbe necessario prima di effettuare i calcoli moltiplicare i coefficienti c e c' per $\frac{\sigma}{1,8}$. Le formule riportate con i rispettivi coefficienti sono dovuti a Schweydar. Nelle formule precedenti 0,707 rappresenta sen 45° e cos 45°. Altri metodi per tali correzioni sono stati proposti da Jung, Haalk, Nikiforov, ecc., e dallo stesso Eötvös.

Una seconda correzione è quella *cartografica* che in un certo senso completa quella topografica e che si estende da km in km fino a 10 km dal punto di stazione, suddividendo le corone circolari in 36 settori angolarmente equidistanti. Per ogni settore, compreso fra i raggi di lunghezze ρ e $\rho + 1$ dalla carta topografica della regione si rileva la quota media, indi la differenza h fra essa e la quota della stazione. Con questa differenza per le quattro derivate si calcolano i contributi:

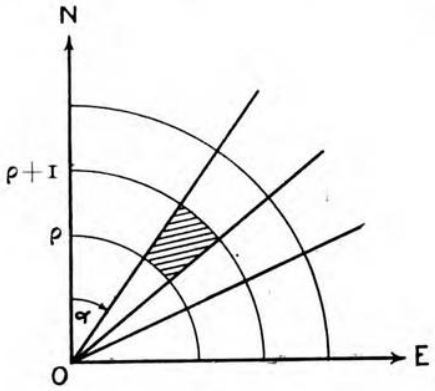

Fig. 16.

$$\Delta'' U_{xz} = -3/2\,\varepsilon\,\sigma\,h^2\,\frac{\cos\alpha\,d\alpha\,d\rho}{\rho^3}$$

$$\Delta'' U_{yz} = -3/2\,\varepsilon\,\sigma\,h^2\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha\,d\rho}{\rho^3}$$

$$\Delta'' U_{\Delta} = -3\,\varepsilon\,\sigma\,h^2\,\frac{\cos 2\alpha\,d\alpha\,d\rho}{\rho^3}$$

$$\Delta'' U_{xy} = -3\,\varepsilon\,\sigma\,h^2\,\frac{\operatorname{sen} 2\alpha\,d\alpha\,d\rho}{\rho^3}$$

e si estendono i calcoli a tutti i circoli ed a tutti i settori. In queste formule σ rappresenta la densità del terreno nel settore considerato.

Per facilitare questi calcoli si possono compilare opportuni schemi e costruire regoli calcolatori.

Una terza correzione è quella che va sotto la dicitura : *riduzione dei risultati al meridiano astronomico*. Si tratta in altre parole di effettuare un cambiamento di assi : dal sistema topografico passare al sistema geoidico. Per questo è necessaria la conoscenza della *declinazione magnetica* δ nel punto stazione. Il passaggio si effettua con le note formule della Geometria analitica :

$$U_{xz} = U'_{xz}\cos\delta + U'_{yz}\operatorname{sen}\delta$$

$$U_{yz} = -U'_{xz}\operatorname{sen}\delta + U'_{yz}\cos\delta$$

$$U_{xy} = -U'_{\Delta}\,\frac{\operatorname{sen} 2\delta}{2} + U'_{xy}\cos 2\delta$$

$$U_{\Delta} = -U'_{\Delta}\cos 2\delta - 2\,U'_{xy}\operatorname{sen} 2\delta$$

dove i simboli accentati rappresentano i valori delle derivate riferite al meridiano magnetico e corrette per la topografia e la cartografia.

Questa correzione si rende necessaria volendo orientare le varie stazioni al Nord geografico, avendo in campagna, per mezzo dell'ago magnetico di cui è corredata la Bilancia orientate tutte le stazioni al Nord magnetico.

Un'ultima correzione da apportare alle derivate è quella denominata *normale* ossia la *correzione per l'ellissoide ;* essa in altre parole rappresenta il valore teorico delle derivate ed il suo contributo va levato alle derivate ottenute con le correzioni accennate e i risultati rappresentano le *anomalie* dovute alle masse disturbanti del sottosuolo e perciò queste vengono chiamate *perturbazioni sotterranee.*

Non è difficile comprendere che considerata la formula della gravità ellissoidica :

$$g = g_e (1 + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

($g_e = 978$ gal, $\beta = 0{,}00528$) si può facilmente eseguire la derivata rispetto al meridiano (asse delle x) e rispetto al parallelo (asse delle y) ed ottenere le :

$$U^n_{xz} = \frac{d\,g}{d\,x} = \frac{\partial\,g}{\partial\,\varphi}\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\,g}{\partial\,\varphi} = \frac{g_e}{\rho}\,\beta \operatorname{sen} 2\,\varphi\,;$$

$$U^n_{xz} = \frac{d\,g}{d\,y} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,g}{\partial\,\lambda} = O$$

dove ρ ed r rappresentano il raggio del meridiano e del parallelo alla latitudine φ.

Con queste derivazioni si hanno i valori normali per le componenti del gradiente. Per le altre derivate si avrà :

$$U^n_{xy} = O$$

mentre U^n_Δ si ricava dall'espressione :

$$U_\Delta = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{N}\right)$$

effettuando la derivata rispetto ad x tenendo conto della :

$$\frac{\partial}{\partial\,x} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\,\varphi}\,.$$

Le espressioni dei raggi principali di curvatura dell'ellissoide sono date dalle : $\rho = \dfrac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi^3}}$ $\qquad N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$.

Per le latitudini in cui è compresa l' Italia queste correzioni per le varie derivate sono mediamente dei seguenti importi in unità eötvössiane :

$U^n_{xz} = +\,8\,E$, $\qquad U^n_{yz} = O\,E$, $\qquad U^n_{xy} = O\,E$, $\qquad U^n_\Delta = 5\,E$.

l) INDICAZIONE GRAFICA DEI VETTORI E DELLE CURVATURE.

Eseguiti tutti i calcoli si segnano le stazioni sulla carta topografica della regione battuta e per ciascuna si indica con un vettore uscente dal punto stazione la direzione e la sua intensità rispetto una data scala e la curvatura mediante un segmento che rimane diviso in due parti eguali dal punto rappresentante la stazione. Le direzioni del gradiente e della curvatura si hanno calcolando, con le formule ricavate, i rispettivi azimut.

Nel grafico annesso sono segnate tre stazioni con i relativi gradienti e le corrispondenti curvature.

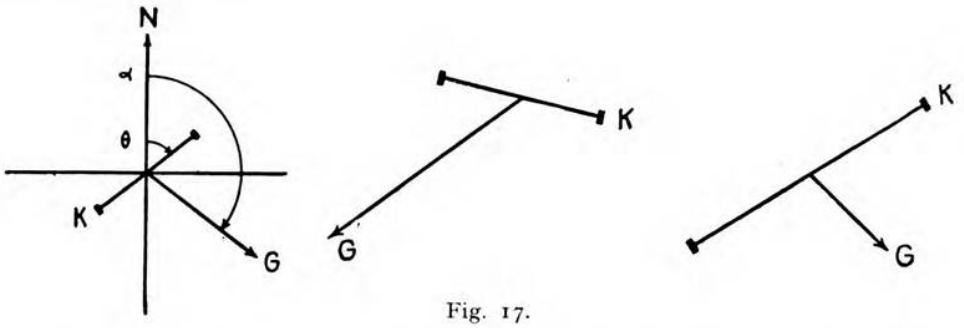

Fig. 17.

È ovvio che dalla *direzione* dei gradienti si può fare induzioni circa le giaciture delle *masse sotterranee perturbanti.*

m) DIFFERENZA DI GRAVITÀ FRA DUE STAZIONI EÖTVÖSSIANE.

Una ulteriore ricerca molto interessante è quella di determinare come si è accennato al § 1, *la differenza di gravità* Δg *fra due stazioni successive.*

Siano a tale uopo P_1 e P_2 due stazioni ; l'azimut della congiungente $P_1 P_2$ sia α e U'_{xz} U'_{yz} e U''_{xz} U''_{yz} le derivate atte a dare i gradienti orizzontali G' e G'' nei due punti P_1 e P_2.

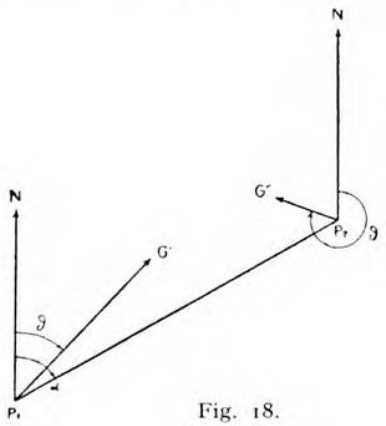

Fig. 18.

La variazione di g nella direzione P_1 P_2 è data dalla media delle proiezioni dei due gradienti G' e G'' sulla retta $P_1 P_2$ moltiplicata per la distanza $P_1 P_2$.

Indicando ulteriormente con δ' e δ'' gli azimut dei gradienti G' e G'', essendo per le (5) e (8) che trascriviamo per maggior intelligenza :

$$G = \sqrt{U^2_{xz} + U^2_{yz}}$$

$$\cos \delta = \frac{U_{xz}}{G} \qquad \operatorname{sen} \delta = \frac{U_{yz}}{G}$$

avremo per quanto detto:

$$\Delta g = 1/2 \left\{ G' \cos(\alpha - \delta') + G'' \cos(\alpha - \delta'') \right\} . P_1 P_2$$

e da questa successivamente:

$$\Delta g = \frac{P_1 P_2}{2} \left\{ G' \cos\alpha \cos\delta' + G' \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta' + G'' \cos\alpha \cos\delta'' + G'' \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta'' \right\}$$

$$= \frac{P_1 P_2}{2} \left\{ \cos\alpha . U'_{xz} + \operatorname{sen}\alpha . U'_{yz} + \cos\alpha . U''_{xz} + \operatorname{sen}\alpha . U''_{yz} \right\}$$

$$= \frac{P_1 P_2}{2} \left\{ (U'_{xz} + U''_{xz}) \cos\alpha + (U'_{yz} + U''_{yz}) \operatorname{sen}\alpha \right\}$$

formula importantissima che ci permette di determinare la gravità in P_2 quando sia nota quella in P_1.

Collegando in poligonale più stazioni A, B, C, ... L e nota la gravità in A si potrà mediante la precedente determinare la gravità nei singoli punti B, C, ... L.

Da misure compiute col pendolo a Portici e Ottaiano nella regione circumvesuviana è stato trovato per Δg l'importo:

$$(+ 0{,}024 \pm 0{,}002) \text{ gal.}$$

Collegato poi Portici con Ottaiano mediante nº 28 stazioni con la Bilancia, risultò come differenza gravimetrica il valore:

$$+ 0{,}022 \text{ gal.}$$

in perfetta armonia col valore pendolare. Accordi di questo tipo sono stati ottenuti in molte determinazioni eseguite in Italia, Spagna, Ungheria, Giappone.

Notiamo da ultimo che con le Δg è possibile ricavare per ogni stazione la gravità g. Dal confronto di queste g con le gravità normali si traggono le *anomalie gravimetriche* della zona esplorata. Congiungendo con linee i punti della medesima anomalia si ottiene un piano a *linee isoanomale* atto a rappresentare il comportamento della topografia sotterranea.

(*Continua*)

Prof. GIOVANNI BOAGA
Geodeta Capo dell'I. G. M.