PRINCIPALI NOZIONI DELLA TEORIA DEGLI ERRORI CON APPLICAZIONI TOPOGRAFICHE ESPOSTE CON METODO ELEMENTARE

Prof. dott. Giovanni Boaga

L'A. giustificato il perchè del lavoro e premesse brevi considerazioni sul calcolo approssimato, enuncia alcune regole fondamentali che gli permettono di svolgere con metodo elementare i principî della teoria degli errori. Come applicazioni dirette delle proprietà dimostrate, l'A. tratta delle precisioni conseguibili nei più importanti problemi topografici.

Molte volte in questi ultimi tempi ho avuto occasione di intrattenermi con numerosi geometri del Catasto su argomenti concernenti la Teoria degli errori con particolare riguardo alle applicazioni topografiche.

Ho dovuto constatare che tutti indistintamente lamentavano nella loro cultura, diremo così professionale, una sensibile lacuna per la impossibilità di tenere dietro, come avrebbero voluto, alle bellissime applicazioni di tale teoria. In relazione a queste constatazioni ho preso la penna ed ho redatto il presente articolo che dedico esclusivamente ai geometri del Catasto ed a quanti che, conoscendo le nozioni dell'algebra elementare comprese nel programma degli Istituti tecnici per geometri, [1] desiderano apprendere le linee fondamentali della Teoria degli errori, pur non conoscendo i principî del Calcolo differenziale.

Sarò oltremodo compensato della lieve fatica se i lettori, ai quali dedico questo studio, vorranno seguirmi fino alla fine; essi potranno così — con semplice sforzo — rendersi conto dei più importanti risultati della Teoria in discorso, attraverso una successione di operazioni elementari e potranno altresì prendere visione del come sia possibile considerare il problema della propagazione degli errori in talune belle e suggestive applicazioni topografiche, specialmente per le misure indirette, argomenti questi, ritenuti a torto, di esclusivo dominio e comprensione di coloro che conoscono i fondamenti delle matematiche superiori e per questo bandite dall' insegnamento della Topografia negli Istituti tecnici.

Ciò premesso, iniziamo il nostro compito ricavando alcune formule che costituiscono la base degli ulteriori sviluppi.

I. Premesse analitiche

§ 1. – Siano a ed a' due numeri, di cui il secondo maggiore o minore del primo, ma molto prossimo ad esso; diremo che si passa da a ad a' mediante un *incremento* di a, che indicheremo col simbolo m_a. Nei calcoli immagineremo m_a così piccolo da poter trascurare il suo quadrato. [2] Avremo allora, per le ben note formule del quadrato e del cubo di un binomio, le seguenti formule approssimate:

$$(a + m_a)^2 = a^2 + 2\,a\,m_a = a^2\left(1 + 2\,\frac{m_a}{a}\right) \qquad [1]$$

$$(a + m_a)^3 = a^3 + 3\,a^2 m_a = a^3\left(1 + 3\,\frac{m_a}{a}\right) \qquad [2]$$

[1] Operazioni sui monomi e sui polinomi – equazioni di primo e di secondo grado – potenze con esponente intero e frazionario, positivo e negativo – radicali – formule fondamentali di goniometria – elementi di trigonometria.

[2] Per esempio: i numeri 5,032 e 0,927 sono prossimi a 5 e 1; gli incrementi corrispondenti sono + 0,032 e — 0,073.

ed in generale:

$$(a + m_a)^n = a^n + n\, a^{n-1} m_a = a^n \left(1 + n \frac{m_a}{a}\right) \qquad [3]$$

con n qualunque.

Particolarizzando n, ponendo nella [3] rispettivamente $\frac{1}{2}$ e -1 avremo le seguenti:

$$(a + m_a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a + m_a} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{m_a}{a}\right) = \sqrt{a} \left(1 + \frac{m_a}{2a}\right) \qquad [4]$$

$$(a + m_a)^{-1} = \frac{1}{a + m_a} = a^{-1} \left(1 - 1 \cdot \frac{m_a}{a}\right) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{m_a}{a}\right) \qquad [5]$$

Notevoli per le applicazioni numeriche sono le formule che derivano da queste ponendo $a = 1$. [1)]

§ 2. – Sia ora

$$s = a + b$$

la somma s di due numeri a e b. Ci proponiamo di determinare l'incremento m_s che subisce la somma s allorchè a e b assumono gli incrementi m_a e m_b. Tale incremento ovviamente è dato dalla:

$$m_s = (a + m_a + b + m_b) - (a + b) = m_a + m_b \qquad [6]$$

e da qui la

Regola I: *L'incremento di una somma è eguale alla somma degli incrementi degli addendi.*

§ 3. – Indicando con p il prodotto di due fattori a, b l'incremento m_p del prodotto, ritenendo nei calcoli trascurabile il prodotto degli incrementi m_a, m_b dei fattori, è dato dalla:

$$m_p = (a + m_a)\,(b + m_b) - a\,b = m_a \times b + a \times m_b \qquad [7]$$

e traducendo questo risultato in linguaggio ordinario ne deriva la

Regola II: *L'incremento del prodotto di due fattori, quando entrambi i fattori vengono incrementati, è eguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando l'incremento di un fattore per l'altro fattore.*

---

1) Incidentalmente osserviamo che le [1] ... [5] quando sia soddisfatta la condizione dianzi posta per l'incremento m_a, si prestano assai bene per il rapido calcolo approssimato (stenoaritmia). A titolo di esemplificazione dovendo calcolare a meno di 1/1000 il rapporto 5 : 4,032 avremo, applicando la [5]:

$$5 : 4{,}032 = 5 \times \frac{1}{4{,}032} = 5 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{0{,}032}{4}\right) = 1{,}25 \times (1 - 0{,}008) = 1{,}25 \times 0{,}992 = 1{,}240.$$

Analogamente con applicazione immediata delle [4], [2] e [1] si hanno i seguenti risultati a meno di 1/1000:

a) $\sqrt{25{,}64} = \sqrt{25 + 0{,}64} = \sqrt{25}\left(1 + \frac{0{,}64}{2 \times 25}\right) = 5 \times (1 + 0{,}0128) = 5{,}064$

b) $(1{,}012)^3 = (1 + 0{,}012)^3 = 1 + 3 \times 0{,}012 = 1{,}036$

c) $(2{,}016)^2 = (2 + 0{,}016)^2 = 4\left(1 + 2 \times \frac{0{,}016}{2}\right) = 4{,}064$

La [7] può anche essere scritta sotto la forma:

$$m_p = a\,b\left(\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b}\right)$$

che facilmente si generalizza per un prodotto di più fattori $a\, b \ldots l$ e fornisce la

$$m_p = a\,b \cdots l\left(\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \cdots \frac{m_l}{l}\right) \qquad [8]$$

e quindi:

Regola III: *L'incremento di un prodotto di due o più fattori è eguale al prodotto moltiplicato per la somma delle frazioni aventi per denominatori rispettivamente i singoli fattori e per numeratori i corrispondenti incrementi.*

Se qualche fattore non viene incrementato si ritiene nullo il corrispondente incremento.

Nel caso particolare in cui tutti i fattori, in numero di n, sono eguali fra loro, dalla [8] si trae la seguente formula per l'incremento m_P della $P = a^n$ (potenza n–esima di a):

$$m_P = a^n\left(\frac{m_a}{a} + \frac{m_a}{a} + \cdots \frac{m_a}{a}\right) = n\,a^{n-1} \cdot m_a \qquad [9]$$

Questo risultato si ottiene anche applicando direttamente la [3]; esso ci dà la

Regola IV: *L'incremento della potenza n–esima di* **a** *per un incremento della base, è eguale ad* **n** *volte la potenza (n — 1)–esima di* **a**, *moltiplicata per l'incremento della base*

Dalla [9] per $n = -1$ scende ulteriormente:

$$P = \frac{1}{a}$$

e

$$m_P = -1 \cdot a^{-1-1} \cdot m_a = -\frac{m_a}{a^2} \qquad [10]$$

risultato che si ottiene anche ricorrendo alla [5]. Con la [10] abbiamo la

Regola V: *L'incremento dell'inverso di un numero per un incremento dello stesso, è eguale all'inverso del quadrato del numero moltiplicato per l'incremento considerato però col segno opposto.*

§ 4. – Per il quoziente:

$$q = \frac{a}{b}$$

avremo, in base alla [5]:

$$m_q = \frac{a + m_a}{b + m_b} - \frac{a}{b} = \frac{a\left(1 + \frac{m_a}{a}\right)}{b\left(1 + \frac{m_b}{b}\right)} - \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a}{b}\left(1 + \frac{m_a}{a}\right)\left(1 - \frac{m_b}{b}\right) - \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a}{b}\left(1 + \frac{m_a}{a} - \frac{m_b}{b}\right) - \frac{a}{b} = \frac{m_a}{b} - \frac{a\,m_b}{b^2}$$

$$= \frac{b \cdot m_a - a \cdot m_b}{b^2}$$

Questo risultato si può ottenere dalla equivalente

$$q = a \cdot \frac{1}{b}$$

applicando la Regola II e tenendo conto della Regola V. Si ha con ciò:

$$m_q = m_a \cdot \frac{1}{b} + a \cdot m_{\frac{1}{b}} = m_a \frac{1}{b} - a \cdot \frac{m_b}{b^2}$$

$$= \frac{b \cdot m_a - a \cdot m_b}{b^2} \qquad [11]$$

ossia:

Regola VI: *L'incremento di un quoziente, quando vengono incrementati il dividendo ed il divisore, è eguale ad una frazione che ha per denominatore il quadrato del divisore e per numeratore la differenza fra i prodotti dell'incremento del dividendo per il divisore e l'incremento del divisore per il dividendo.*

§ 5. - Per l' incremento della

$$R = \sqrt{a}$$

si ha ricorrendo alla [4]:

$$m_R = \sqrt{a + m_a} - \sqrt{a} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{m_a}{2\,a}\right) - \sqrt{a} = \frac{m_a}{2\sqrt{a}} \qquad [12]$$

e quindi:

Regola VII: *L'incremento della* $\sqrt{a}$ *per l'incremento* m_a *del radicando è dato da una frazione avente per denominatore il doppio della radice e per numeratore l'incremento del radicando.*

Generalizzando e ponendo nella [3] $\frac{1}{n}$ al posto di n si trae per l'incremento della

$$R = \sqrt[n]{a}$$

la

$$m_R = a^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\,\frac{m_a}{a}\right) - a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,a^{\frac{1}{n}}\,\frac{m_a}{a} = \frac{m_a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} \qquad [13]$$

perciò:

Regola VIII: *L'incremento della radice n–esima di* **a** *per un incremento* m_a *del radicando è eguale ad una frazione che ha per denominatore l'indice della radice moltiplicata per la radice n–esima della potenza* $(n - 1)$*–esima di* **a** *e per numeratore l'incremento* m_a.

§ 6. - Nel caso

$$L = \log\ a$$

con *log* indicazione di logaritmo decimale si ha per l'incremento m_a di a:

$$m_L = \log\,(a + m_a) - \log a$$

$$= \log a\left(1 + \frac{m_a}{a}\right) - \log a = \log\left(1 + \frac{m_a}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\,.\ m_a \qquad [14]$$

con $\mu = 0{,}43429$ modulo di conversione dei logaritmi neperiani in logaritmi decimali.

La [14] fornisce la

Regola IX: *L'incremento logaritmico del logaritmo decimale di* a *per l'incremento* $\mathbf{m}_a$ *del numero è dato dal prodotto dell'inverso del numero per l'incremento* $\mathbf{m}_a$ *moltiplicato per il modulo* μ *di conversione.*

È ovvio che la frazione $\frac{\mu}{a}$ nella [14] rappresenta le parti proporzionali messe in evidenza nelle tavole logaritmiche.

§ 7. – Se nella

$$P = a^n \qquad [15]$$

anzichè a si incrementa n, conviene determinare l'incremento logaritmico di P invece dell'incremento di P.

A tal uopo, passando ai logaritmi la [15]

$$\log P = n \cdot \log a \qquad [16]$$

indi incrementando, ricordando la Regola II, ritenendo $m_{\log a} = 0$ si ricava:

$$m_{\log P} = m_n \times \log a \qquad [17]$$

facilmente traducibile in linguaggio ordinario.

Se nella [15] o nella equivalente [16] variano entrambi i parametri a ed n, applicando ancora alla [16] la Regola II, tenendo pure conto della [14] si trae:

$$m_{\log P} = m_n \times \log a + n \cdot \frac{a}{\mu} \cdot m_a \qquad [18]$$

I due addendi di questa formula rappresentano rispettivamente gli incrementi di log P quando *non* si incrementa a (primo addendo) e quando *non* si incrementa n (secondo addendo). Tali addendi prendono il nome di *incrementi parziali*. Si ha così la:

Regola X: *L'incremento totale è eguale alla somma degli incrementi parziali.*

Questa regola è di carattere generale e può essere estesa a un complesso qualunque di operazioni algebriche; a tale uopo si osservi le [6], [7], [8] e [11]. [1]

---

[1] Come le formule stabilite al § 1, così anche queste ultime trovano larga applicazione nei calcoli approssimati. A tale uopo valgano i seguenti esempi:

a) Calcolare il prodotto 2,007 × 3,008 a meno di 1/1000. Assumendo come incrementi dei due fattori gli importi 0,007 e 0,008, indi applicando la Regola II, l'incremento del prodotto è:

$$0{,}007 \times 3 + 0{,}008 \times 2 = 0{,}037$$

perciò nell'approssimazione voluta

$$2{,}007 \times 3{,}008 = 2 \times 3 + 0{,}037 = 6{,}037$$

b) Calcolare il quoziente 3,012 : 12,015 a meno di 1/10.000.

Posto: $a = 3$, $b = 12$, $m_a = 0{,}012$, $m_b = 0{,}015$, applicando la [11], si ricava quale incremento del quoziente 3 : 12 = 0,25 l'importo:

$$\frac{0{,}012 \times 12 - 3 \times 0{,}015}{144} = 0{,}0006$$

Con ciò il quoziente richiesto è 0,2506.

c) Sapendo che log 100 = 2, calcolare log 100,7.

Posto: $a = 100$, $m_a = 0{,}7$ la [14] fornisce l'incremento logaritmico:

$$\frac{0{,}43429}{100} \times 0{,}7 = 0{,}00304$$

dunque:

$$\log 100{,}7 = 2{,}00304.$$

§ 8. – Torna utile alle volte conoscere anche gli incrementi delle funzioni goniometriche in corrispondenza di un incremento dell'argomento.

Così se m_a indica l' incremento dell'arco a, l' incremento del sen a è dato dalla

$$m_{\text{seno}} = \text{sen}\,(a + m_a) - \text{sen}\, a$$

$$= \text{sen}\, a \cos m_a + \cos a\, \text{sen}\, m_a - \text{sen}\, a$$

epperò, per m_a piccolo, il seno si può ritenere eguale alla lunghezza dell'arco m_a ed il coseno eguale all'unità; si ha così dalla precedente:

$$m_{\text{seno}} = m_a \cdot \cos a \qquad [19]$$

ed esprimendo m_a in secondi si ha invece:

$$m_{\text{seno}} = \frac{m''_a}{\varrho''} \cdot \cos a \qquad [20]$$

con $\varrho'' = 206\,265''$.

Analogamente per il $\cos a$ risulta:

$$m_{\text{coseno}} = - m_a\, \text{sen}\, a = - \frac{m''_a}{\varrho''} \cdot \text{sen}\, a \qquad [21]$$

Per la

$$\text{tang}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}$$

applicando la [11] e tenendo conto delle ultime due si perviene senza difficoltà alla

$$m_{\text{tang}} = \frac{m_{\text{seno}} \cos a - m_{\text{coseno}}\, \text{sen}\, a}{\cos^2 a} = \frac{m_a \cos^2 a + m_a\, \text{sen}^2 a}{\cos^2 a}$$

dalla quale scendono le due equivalenti:

$$m_{\text{tang}} = m_a\,(1 + \text{tang}^2\, a) = \frac{m_a}{\cos^2 a}. \qquad [22]$$

Per la

$$\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}$$

si ha similmente:

$$m_{\text{cot}} = - m_a\,(1 + \cot^2 a) = - \frac{m_a}{\text{sen}^2\, a} \qquad [23]$$

Esprimendo m_a in secondi valgono le:

$$m_{\text{tang}} = \frac{m''_a}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\cos^2 a} \qquad\qquad m_{\text{cot}} = - \frac{m''_a}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2\, a}$$

Le [19], [20], [21], [22] e [23] sono facilmente traducibili in linguaggio ordinario.

Gli argomenti esposti, come è stato detto, costituiscono le basi analitiche per lo studio ulteriore degli argomenti che ci siamo prefissi di esaminare. [1]

[1] Il lettore che conosce il Calcolo differenziale avrà notato che i risultati ottenuti, qualora agli *incrementi* si sostituiscano i *differenziali*, rappresentano le principali proprietà del Calcolo differenziale.

§ 9. - *Classificazione degli errori e loro leggi di distribuzione.* Come è noto nelle misurazioni non è possibile raggiungere l'esattezza assoluta in quanto esse sono soggette ad inevitabili *errori* dipendenti sia dalle imperfezioni dei sensi dell'osservatore, sia dai difetti degli strumenti impiegati, sia ancora da una grande quantità di cause perturbatrici di origine diversa e che sfuggono anche al più diligente osservatore.

Questi errori, denominati *errori di osservazione*, si possono comprendere in due classi:

a) errori regolari o sistematici;

b) errori fortuiti o accidentali.

Gli errori della prima classe derivano sempre da cause sottoposte a leggi determinate; ogni qual volta una di queste cause agisce su ciascuna osservazione viene prodotto uno spostamento diretto sempre nel medesimo senso. Questi errori dipendono o da cause di natura fisica (es.: errori personali, rifrazione atmosferica, dilatazione dei corpi per effetto della variazione di temperatura, ecc.) o da difetti strumentali (es.: cattiva rettifica dello strumento, sua imperfetta costruzione, ecc.).

Nelle misure topografiche si cerca di eliminare tali errori sia con l'evitare le cause di errore, sia con metodi speciali di osservazione (es.: letture coniugate nelle misure angolari, verifica delle letture alla stadia, ecc.).

Gli errori della seconda classe sono caratterizzati dalla loro variabilità, senza alcuna successione, ecc. e provengono da un gran numero di cause perturbatrici le quali agiscono una indipendentemente dall'altra. Tali errori non si possono eliminare, tuttavia si possono diminuirne gli effetti sottoponendo le misure a speciali metodi di compensazione.

L'esperienza dimostra che:

a) gli errori accidentali positivi si presentano con eguale frequenza dei negativi;

b) gli errori piccoli sono più frequenti degli errori grandi;

c) gli errori sono sempre compresi entro due determinati limiti.

§ 10. - *Errore medio.* Da quanto detto risulta chiaro che ripetendo un certo numero di volte, sopra una grandezza fisica, la stessa misura, i risultati che si otterranno saranno in generale differenti tra loro. Se $X_1\ X_2\ \ldots\ X_n$ sono i risultati di n misure effettuate sulla grandezza di *valore vero* X, alle $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ definite dalle

$$X_1 - X = x_1 \qquad X_2 - X = x_2 \ldots X_n - X = x_n \tag{24}$$

si attribuisce la denominazione di *errori di osservazione*.

Gli x_i definiti con le [24] risulteranno per la precedente legge *a*) in parte positivi e in parte negativi e per la stessa legge e per la *c*) la loro somma sarà prossima allo zero. Conviene allora considerare quale *errore medio di una osservazione* m quello definito da Gauss mediante la

$$m = \pm \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}\,. \tag{25}$$

Nella topografia operativa è ovvio che gli incrementi di cui si è fatto largo uso nei primi otto paragrafi tengono ora il posto degli errori medi (precisioni) con i quali l'operatore riesce ad ottenere le singole misure, dati gli strumenti a sua disposizione ed i metodi usati per eseguirle.

§ 11. – *Errore di una grandezza dipendente da più altre direttamente osservate.* Se una grandezza g è legata a più altre $a, b, c, \ldots$ mediante un certo numero di operazioni algebriche, è naturale che ogni misura effettuata su $a, b, c, \ldots$ sarà affetta di un errore medio. Sostituendo allora alle grandezze $a, b, c, \ldots$ i risultati delle misure ed eseguendo su di essi le operazioni indicate, si troverà per la grandezza incognita g un valore approssimato della stessa. Converrà pertanto determinare in quale intorno del valore così stabilito cade la vera misura della grandezza considerata. Tale intorno viene chiamato errore medio della grandezza in questione. Se $m_a, m_b, m_c, \ldots$ sono gli errori medi delle misure effettuate sulle grandezze $a, b, c, \ldots$ direttamente osservate, è necessario trovare i contributi degli incrementi parziali (errori parziali) della g, per le singole misure $a, b, c, \ldots$ ricorrendo, secondo l'opportunità, ora all'una ora all'altra delle Regole stabilite nelle pagine precedenti. Indicando con $m'_g, m''_g, m'''_g, \ldots$ detti contributi parziali dipendenti ordinatamente dagli incrementi $m_a, m_b, m_c, \ldots$ l'errore totale della grandezza g, cioè m_g è dato dalla relazione pitagorica:

$$m_g = \pm \sqrt{(m'_g)^2 + (m''_g)^2 + (m'''_g)^2 + \ldots}$$

che tradotta in linguaggio comune fornisce la

Regola XI: *L'errore medio di una grandezza dipendente da più altre direttamente osservate è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati degli errori medi parziali dovuti separatamente dalle misure eseguite sulle singole grandezze osservate.*

§ 12. – *Media aritmetica. Errore della media.* Ci proponiamo ora di determinare il valore X_0 da attribuire alla misura della grandezza X di cui al capo 10 in modo che risulti minima la somma dei quadrati degli errori $l_1, l_2, \ldots l_n$ definiti dalle

$$l_1 = X_1 - X_0 \qquad l_2 = X_2 - X_0 \ldots l_n = X_n - X_0 \tag{26}$$

(principio della Teoria dei minimi quadrati).

Attribuendo agli errori l_i messi in evidenza nella

$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = \text{minimo} \tag{27}$$

gli incrementi m_{l_i} risulta per il primo membro:

$$(l_1 + m_{l_1})^2 + \ldots + (l_n + m_{l_n})^2$$

e svolgendo i quadrati e trascurando i contributi dovuti ai quadrati degli incrementi, ne consegue, perchè continui ad essere soddisfatta la [27]:

$$l_1 \, m_{l_1} + l_2 \, m_{l_2} + \ldots + l_n \, m_{l_n} = 0$$

Questa condizione è soddisfatta qualunque siano gli incrementi m_{l_i}, in particolare quindi per

$$m_{l_1} = m_{l_2} = \ldots = m_{l_n}$$

che corrisponde al caso in cui tutte le misure sono fatte collo stesso strumento, dallo stesso operatore, con le stesse modalità.

Con questa ipotesi si ottiene:

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n = 0$$

Indi sostituendo in questa le [26] si ricava:

$$(X_1 - X_0) + (X_2 - X_0) + \ldots + (X_n - X_0) = 0$$

dalla quale

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \qquad [28]$$

che ci porta a concludere la

Regola XII: *Il valore* X_0 *della media aritmetica delle* n *misure* $X_1\,X_2\,\ldots\,X_n$ *eseguite sulla grandezza* X *è tale che la somma degli scostamenti* $l_i = X_i - X_0$ *è zero e che la somma dei loro quadrati è minima.*

Pertanto, considerando la media aritmetica di un sistema di misure, val quanto considerare un valore compensato soddisfacente alle condizioni ora dette.

L'errore della media M è definito dalla:

$$M = X_0 - X. \qquad [29]$$

Per determinare questo errore basterà scrivere la [28] sotto la forma:

$$X_0 = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \ldots + \frac{1}{n} X_n$$

attribuire ai vari addendi gli incrementi che provengono supponendo di incrementare le X_i osservate, ognuna della quantità m (errore medio di una osservazione) e applicare la Regola XI. Si ottiene così

$$M = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{n}\,m\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\,m\right)^2 + \ldots \left(\frac{1}{n}\,m\right)^2} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad [29']$$

e da qui la

Regola XIII: *L'errore della media è, rispetto all'errore medio di una osservazione, inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero delle osservazioni.*

§ 13. – *Calcolo dell'errore medio* m *di una osservazione.* L'errore m definito con la [25] non può essere numericamente valutato con la [25] stessa, perchè i residui di osservazione x_i in essa contenuti non sono noti, in quanto X non è noto. Si può tuttavia determinare m per mezzo degli scostamenti l_i delle singole misure X_i dalla media X_0. Difatti, eliminando dalla [29] l'X_0 mediante la [26] e l'X con le [24] si ottengono le n relazioni:

$$x_1 = l_1 + M \quad , \quad x_2 = l_2 + M \quad , \quad \ldots \quad x_n = l_n + M \qquad [30]$$

e quadrando queste, e sommando membro a membro i risultati ottenuti, indicando con [ ] le somme, si trae la:

$$[x^2] = [l^2] + 2\,M \cdot [l] + n \cdot M^2 \qquad [31]$$

Introducendo nella [31] la [29'] e ricordando la [25] e tenendo conto che si ha $[l] = 0$ si ricava facilmente la:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[l^2]}{n - 1}} \qquad [32]$$

dunque:

Regola XIV: *L'errore medio di una osservazione si trova estraendo la radice quadrata del quoziente fra la somma dei quadrati degli scostamenti dalla media ed il numero delle osservazioni, diminuito di uno.* [1]

III. Applicazioni

§ 14. — *Sull'errore medio delle misure dirette delle distanze.* Immaginiamo di scomporre una distanza D in n tronchi di lunghezze $d_1 d_2 \ldots d_n$ e di misurare il primo tratto n_1 volte, il secondo n_2 volte, ecc. l'ultimo tratto n_n volte. Se $m_1 m_2 \ldots m_n$ sono gli errori medi riscontrati nei singoli tronchi, l'errore medio M di D vale per la Regola XI:

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} \qquad [33]$$

Se si suppongono tutti i tratti della medesima lunghezza d e ciascuno misurato colla medesima diligenza, con il medesimo longimetro ed un egual numero di volte, potremo porre:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = \mu$$

e conseguentemente dalla [33]:

$$M = \pm \mu \sqrt{n}\,. \qquad [34]$$

Se la lunghezza del longimetro è d, avremo:

$$D = n \cdot d \qquad [35]$$

[1] Es.: Un angolo venne misurato cinque volte. I risultati delle misure ed il calcolo degli errori medi sono riportati nel seguente prospetto:

N.	Valore dell'angolo α	Scostamenti l	$l \cdot l$
1	82° 17′ 42″,8	− 3″,2	10,24
2	46,9	+ 0,9	0,81
3	48,4	+ 2,4	5,76
4	46,1	+ 0,1	0,01
5	45,8	− 0,2	0,04
	media: 82° 17′ 46″,0	$[l] = 0,0$	$[ll] = 16,86$

errore di una osservazione: $m = \pm \sqrt{\dfrac{16,86}{5-1}} = \pm 2''{,}05$

errore della media: $M = \pm \sqrt{\dfrac{16,86}{4 \cdot 5}} = \pm 0''{,}91$

valore compensato dell'angolo: $\alpha_m = 82°\ 17'\ 46''{,}0 \pm 0''{,}91$

In pratica si usa considerare l'*errore temibile* $t = 3 . m$. Nel nostro caso $t = 6''{,}15$ e nessuno degli scostamenti trovati supera t. Se risulta $l > t$, si elimina, o si ripete la misura corrispondente.

onde, eliminando dalla [34] l'n per mezzo della [35]:

$$M = \pm \mu \sqrt{\frac{D}{d}}$$

che fornisce la:

Regola XV: *L'errore nella misura diretta di una distanza è direttamente proporzionale alla radice quadrata della distanza stessa ed inversamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza del longimetro impiegato.*

Posto $d = 1$ dalla [35] scende la:

$$M = \pm \mu \sqrt{D} \qquad [36]$$

che rappresenta, torna opportuno ricordare, l'errore accidentale. Poichè l'errore sistematico si commette in ogni trasporto della misura e sempre nel medesimo senso, così esso sarà dato dalla:

$$M_S = \pm \mu_S \cdot n = \pm \mu_S \frac{D}{d}$$

e nel caso $d = 1$:

$$M_S = \pm \mu_S \cdot D \qquad [37]$$

Nelle [36] e [37] μ e μ_S rappresentano gli errori medi unitari accidentale e sistematico

Per la *tolleranza* si usa prendere la seguente combinazione delle [36] e [37]:

$$t = c_1 \sqrt{D} + c_2 D$$

con $c_1 = \alpha \cdot \mu$, $c_2 = \mu_S$ e α compreso fra 2 e 3.

I coefficienti c_1 e c_2 si deducono da opportune esperienze. Il Catasto italiano, in terreno piano, assume per detti coefficienti i valori 0,015 e 0,0008 rispettivamente.

§ 15. – *Precisione conseguibile nella determinazione delle aree.* È lecito limitare la ricerca della esattezza nella determinazione di un'area rettangolare in quanto ogni figura, per quanto complessa, può ridursi ad un rettangolo equivalente, oppure alla somma di più rettangoli.

Adunque, se a, b, rappresentano le dimensioni di un rettangolo, la sua area risulta dalla

$$S = a \cdot b.$$

Se m_a ed m_b sono gli errori medi delle misure dei lati a e b, risultando gli incrementi parziali di S dei seguenti importi:

$$a \cdot m_b \qquad b \cdot m_a$$

l'errore della S sarà:

$$m_S = \pm \sqrt{a^2 m_b^2 + b^2 m_a^2} \qquad [38]$$

La relazione fra la lunghezza di una linea e l'errore medio della sua misura varia a seconda del metodo seguìto nel misurarla. Se, trattandosi di un piccolo tratto di linea, la sua lunghezza è stata determinata sovrapponendole un'asta graduata (supposta la graduazione priva di errore) l'errore medio della misura è indipendente dalla lunghezza. Così indicando con m indifferentemente i due errori m_a e m_b, la precedente ci dà:

$$m_S = \pm m \sqrt{a^2 + b^2} \tag{39}$$

ove il secondo fattore del secondo membro rappresenta la diagonale del rettangolo.

Misurando invece un allineamento con canne, col nastro, ecc. si commette un errore del tipo [36]. Perciò si ha:

$$m_a = \pm \mu \sqrt{a} \qquad m_b = \pm \mu \sqrt{b}$$

e conseguentemente per la [38]:

$$m_S = \pm \mu \sqrt{a^2 b + a b^2} = \pm \mu \sqrt{S} \sqrt{p} \tag{40}$$

con S e p rispettivamente l'area ed il semiperimetro del rettangolo.

Determinando le lunghezze dei lati del rettangolo con strumenti e metodi che producono errori proporzionali alla lunghezza (es.: cannocchiale e stadia) si ha:

$$m_b = \mu \cdot a \qquad m_b = \mu \cdot b$$

e conseguentemente:

$$m_S = \pm \mu \sqrt{a^2 b^2 + a^2 b^2} = \pm \mu S \sqrt{2} \tag{41}$$

Raccogliendo i risultati [39], [40], [41] abbiamo la

Regola XVI: *L'errore medio cui è affetta la misura dell'area di un rettangolo, è proporzionale o alla diagonale, o alla radice quadrata del prodotto dell'area per il semiperimetro, o infine all'area, a seconda che gli errori medi delle misure dei suoi lati sono indipendenti dalla loro lunghezza, o dipendono dalla radice quadrata della lunghezza, o sono ad essa proporzionali.*

§ 16. – *Possibile spostamento planimetrico* ΔP *di un punto* P *per effetto degli errori* m_x, m_y, *nelle coordinate piane rettangolari.* Tale spostamento è dato dalla relazione pitagorica:

$$\Delta P = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \tag{42}$$

e poichè

$$x = D \cdot \text{sen}\,\theta \qquad y = D \cdot \cos\theta \tag{43}$$

tenendo conto anche delle [19], gli incrementi parziali della prima sono i seguenti:

$$\text{sen}\,\theta \cdot m_D \qquad D \cdot \cos\theta \cdot m_\theta$$

e della seconda, tenendo pure conto della [21]:

$$\cos\theta \cdot m_D \qquad D \cdot (-\text{sen}\,\theta) \cdot m_\theta$$

sicchè per la Regola XI:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \text{sen}^2\theta \cdot m_D^2 + D^2 \cdot \cos^2\theta \cdot m_\theta^2 \\ m_y^2 &= \cos^2\theta \cdot m_D^2 + D^2 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot m_\theta^2 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Introducendo questi risultati nella [42] e riducendo:

$$\Delta P = \pm \sqrt{m_D^2 + D^2 \cdot m_0^2}$$

Mettendo in evidenza l'errore unitario μ per la distanza D:

$$\Delta P = \pm D \sqrt{\mu^2 + m_0''^2 \operatorname{arc}^2 1''}$$

Il secondo addendo del radicando essendo approssimativamente dato dalla $m_0''^2 : (425 . 10^8)$ si può trascurare per modo che rimane con molta approssimazione:

$$\Delta P = \pm D \cdot \mu \qquad [45]$$

e quindi la

Regola XVII: *L'errore nella posizione planimetrica di un punto dipende quasi esclusivamente dalla precisione dell'apprezzamento delle distanze, ed è direttamente proporzionale alle distanze stesse.*

§ 17. – *Precisione conseguibile nella misura ottica delle distanze.* L'equazione della stadia è, come è noto,

$$D = H K \operatorname{sen}^2 Z \qquad [46]$$

dove D è la distanza orizzontale, H la differenza fra le letture alla stadia fatte in corrispondenza dei fili estremi del reticolo, K la costante diastimometrica e Z l'angolo zenitale.

Nel secondo membro della [46] sono messe in evidenza le tre quantità H, K, Z; si può allora, immaginando affette di errori medi m_H, m_K, m_Z, le dette quantità, esaminare partitamente le loro influenze sulla determinazione della distanza D.

A tale uopo indicando con m'_D, m''_D, m'''_D gli errori medi della D per la presenza separata degli errori m_H, m_K, m_Z, si hanno facilmente gli incrementi parziali:

$$m'_D = K \operatorname{sen}^2 Z \cdot m_H = D \cdot \frac{m_H}{H} \qquad (m_H \neq 0 \ , \ m_K = m_Z = 0) \qquad [47]$$

$$m''_D = H \operatorname{sen}^2 Z \cdot m_K = D \cdot \frac{m_K}{K} \qquad (m_K \neq 0 \ , \ m_H = m_Z = 0) \qquad [48]$$

$$m'''_D = H K \cdot 2 \operatorname{sen} Z \cos Z \cdot m_Z = 2 D \cot Z \cdot m_Z \qquad (m_Z \neq 0 \ , \ m_H = m_K = 0) \qquad [49]$$

l'ultimo dei quali è stato ottenuto tenendo conto delle [9], [19].

Dalle [47] e [48] si deduce immediatamente:

$$\frac{m'_D}{D} = \frac{m''_D}{D} = \frac{m_H}{H} = \frac{m_K}{K}$$

ossia: *eguaglianza degli errori unitari delle* D, H, K.

La [47] può anche essere scritta sotto la forma:

$$m'_D \leqq K \cdot m_H \qquad [50]$$

il segno eguale corrispondendo al caso in cui l'asse del cannocchiale è orizzontale.

L'm_H rappresenta l'errore della determinazione dell'intervallo H dato dalla differenza delle due letture l_a, l_b alla stadia; simbolicamente:

$$H = l_a - l_b.$$

Indicando con $m = m_a = m_b$ l'*errore di lettura* risulterà per la Regola XI:

$$m_H = \pm \sqrt{m^2 + m^2} = \pm m\sqrt{2}$$

e conseguentemente dalla [50]:

$$m'_D \leq K\, m\sqrt{2}. \qquad [51]$$

Il rapporto $\frac{m}{D}$ rappresenta l'angolo sotto il quale l'intervallo m della stadia è visto dal cannocchiale; esso pertanto è l'*errore angolare* di cui è affetta la visuale del cannocchiale.

Posto allora nella [51]:

$$\frac{m}{D} = \mu = \mu'' \text{ arc } 1''$$

risulta per l'errore unitario della distanza D:

$$\frac{m'_D}{D} \leq K\sqrt{2} \cdot \mu'' \text{ arc } 1''.$$

Ponendo in questa $\mu'' = 1''$ (limite che può raggiungere un buon cannocchiale in condizioni buone) e $K = 100$, $D = 100$ m., risulta:

$$m'_D \leq 0{,}07 \text{ m}. \qquad [52]$$

Da numerose esperienze eseguite con i moderni strumenti, anche ad asse ottico orizzontale, risulta che questo limite non viene mai raggiunto.

La [48] ci dice che: *per una imperfetta conoscenza della costante diastimometrica K l'errore della distanza cresce proporzionalmente alla distanza stessa.* Per $D = 100$ m., $K = 100$ e $m_K = 0{,}01$ si ha

$$m''_D = 0{,}01 \text{ m}. \qquad [53]$$

Per quanto infine concerne la [49] osserviamo che imponendo la condizione

$$\frac{m'''_D}{D} \leq \frac{1}{1000} \qquad [54]$$

risulta:

$$m''_Z \leq \frac{\text{tg } Z}{2000} \times 206\,265''$$

la quale fornisce gli importi:

per $Z = 45°$	$m_Z \leq 1'\ 43''$
$60°$	$2'\ 58''$
$75°$	$6'\ 02''$
$85°$	$19'\ 19''$

Da questi risultati si deduce che: *per l'angolo Z non è necessaria una determinazione molto precisa.* Ciò dà ragione delle divisioni adottate nelle graduazioni dei cerchi zenitali negli strumenti celerimetrici.

L'errore complessivo sulla determinazione della distanza è, in base alla Regola XI:

$$m_D = \pm \sqrt{(m'_D)^2 + (m''_D)^2 + (m'''_D)^2} \qquad [55]$$

e tenendo conto dei risultati numerici [52], [53], [54] per $D = 100$ m. si trova:

$$m_D = 0{,}14 \text{ m.}$$

in perfetto accordo con le moderne tolleranze lineari adottate recentemente da taluni Uffici topografici e ricavate con un considerevole numero di esperienze.

§ 18. – *Sulla precisione conseguibile nella riduzione degli angoli al centro trigonometrico.* La formula che fornisce l'*errore* ε'' *di eccentricità* è:

$$\varepsilon'' = \frac{e \cdot \operatorname{sen} \alpha}{d \cdot \operatorname{arc} 1''} . \qquad [56]$$

Gli *errori parziali* m'_ε, m''_ε, m'''_ε, di ε'' per gli errori m_e, m_α, m_d, della eccentricità e, dell'angolo α e della distanza d si ottengono dalla [56] incrementandola rispetto ad e ritenendo costanti (cioè privi di errore) le α, d; poi incrementando rispetto α ed infine rispetto d. Operando in questo senso si hanno i seguenti errori parziali:

$$m'_\varepsilon = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{d \cdot \operatorname{arc} 1''} \cdot m_e \leq \frac{m_e}{d \cdot \operatorname{arc} 1''} \qquad [57]$$

$$m''_\varepsilon = \frac{e \cdot \cos \alpha}{d \cdot \operatorname{arc} 1''} \cdot m_\alpha \leq \frac{e \cdot m_\alpha}{d \cdot \operatorname{arc} 1''} \qquad [58]$$

$$m'''_\varepsilon = -\frac{e \operatorname{sen} \alpha}{d^2 \operatorname{arc} 1''} \cdot m_d = -\varepsilon \cdot \frac{m_d}{d} . \qquad [59]$$

In particolare gli ultimi due sono stati ottenuti applicando le [21], [10] rispettivamente.

L'errore medio complessivo è dato da una formula del tipo [55].

Dalla [57] poi in particolare, imponendo la condizione $m'_\varepsilon < 0'',1$ per $d = 10$ km. risulta:

$$m_e < 5 \text{ mm.}$$

Questo risultato è di notevole importanza; esso ci dà la

Regola XVIII: *L'eccentricità* e *deve essere misurata con grande precisione, specialmente quando* **d** *è piccola.*

L'm''_ε esprimendo m_α in secondi diviene:

$$m''_\varepsilon \leq \frac{e}{d} \cdot m''_\alpha$$

e imponendo la condizione $m''_\varepsilon < 0'',1$ ritenendo $e = 3$ m, $d = 10$ km, si ottiene:

$$m''_\alpha < 300'' = 5'$$

ossia nel caso in esame è sufficiente determinare α con l'approssimazione di circa $5'$, pertanto

Regola XIX: *Nella determinazione di α non è necessaria molta precisione.*

Questo fatto è in perfetto accordo con le possibilità pratiche in quanto nella stazione ex-centro è necessario mirare al centro situato molto vicino allo strumento e perciò non è possibile un buon puntamento.

Per quanto concerne la [59] imponendo ancora la condizione $m'''_\varepsilon < 0'',1$ si ottiene:

$$\frac{m_d}{d} < 0'',1 \times \frac{d \operatorname{arc} 1''}{e}$$

e per $c = 3$ m. e $d = 10$ km. si ricava per errore relativo della d:

$$\frac{m_d}{d} < \frac{1}{600}$$

Si può concludere così:

Regola XX. – *Nella determinazione di* **d** *non è necessaria molta precisione: in generale basterà avere il valore dell'errore relativo di* **d** *a meno di 0,0015.*

Dall'esame fatto risulta manifesta la

Regola XXI: *Le riduzioni al centro sono vantaggiose nelle grandi triangolazioni; nelle piccole, finchè è possibile, è bene evitarle.*

§ 19. – *Precisioni conseguibili nelle determinazioni degli elementi di un triangolo in funzione di lati e angoli osservati.*

Chiuderemo questa elementare rassegna risolvendo il

Problema: *In un triangolo sono stati misurati gli angoli α e γ ed il lato c. Supposti m_α, m_γ, m_c gli errori medi di dette misure, calcolare gli errori medi m_a, m_b, m_β degli elementi incogniti del triangolo.*

Il lato a può essere determinato per mezzo della:

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} \qquad [60]$$

(teorema dei seni).

Incrementando separatamente c, α, γ, tenendo conto delle [20], [10] e della [60] stessa, si ottengono le:

$$m'_a = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} \cdot m_c = \frac{a}{c} \cdot m_c \qquad [61]$$

$$m''_a = \frac{c \cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} \cdot m_\alpha = a \cot \alpha \cdot m_\alpha \qquad [62]$$

$$m'''_a = -\frac{c \operatorname{sen} \alpha \cos \gamma}{\operatorname{sen}^2 \gamma} = -a \cot \alpha \cdot m_\gamma \qquad [63]$$

L'errore m_a risultando eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati degli errori parziali, assume la forma, esprimendo m_α e m_γ in secondi:

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{a^2}{c^2} m_c^2 + (a^2 \cot_\alpha^2 \cdot m''^2_\alpha + a^2 \cot_\gamma^2 \cdot m''^2_\gamma) \operatorname{arc}^2 1''}$$

e ritenendo $m''_\alpha = m''_\gamma = m$, come praticamente avviene, quando gli angoli si misurano con lo stesso strumento e con le stesse modalità:

$$m_a = \pm a \sqrt{\left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + (\cot^2 \alpha + \cot^2 \gamma)\, m^2 \cdot \operatorname{arc}^2 1''} \qquad [64]$$

Introducendo gli errori relativi (unitari):

$$\mu_a = \frac{m_a}{a} \qquad \mu_c = \frac{m_c}{c} \qquad [65]$$

la [64] fornisce la:

$$\mu_a^2 = \mu_c^2 + (\cot_\alpha^2 + \cot^2 \gamma)\, m^2 \cdot \mathrm{arc}^2\, 1'' \qquad [66]$$

facilmente traducibile in linguaggio ordinario.

Con procedimento perfettamente analogo, essendo

$$b = \frac{c \,\mathrm{sen}\, (\alpha + \gamma)}{\mathrm{sen}\, \gamma}$$

si arriva alla:

$$\mu_b^2 = \mu_c^2 + \left\{ \frac{\mathrm{sen}^2\, \alpha}{\mathrm{sen}^2\, (\alpha + \gamma)\, \mathrm{sen}^2\, \gamma} + \cot^2 (\alpha + \gamma) \right\} m^2\, \mathrm{arc}^2\, 1'' \qquad [67]$$

Per l'angolo β, risultando esso dato dalla:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

ed essendo i suoi incrementi parziali dati dalle:

$$m'_\beta = - m_\alpha \quad m''_\beta = - m_\gamma$$

l'errore medio corrispondente è rappresentato dalla:

$$m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_\gamma^2} = \pm \sqrt{m^2 + m^2} = \pm m \sqrt{2} \qquad [68]$$

Da qui la

Regola XXII: *L'errore medio di un angolo di un triangolo, dedotto dalle osservazioni degli altri due è di circa una volta e mezza di quello degli angoli osservati.*

Per avere un riferimento relativo all'ordine di grandezza degli errori supponiamo nullo μ_c (ciò è verificato in pratica quando c è una base), $\alpha = \gamma = 60^\circ$, $m = 10''$. Dalla [66] risulta facilmente:

$$\mu_a = \pm 0{,}00004$$

ossia l'errore m_a è del 0,04 %.

Con le [67] e [68] si hanno successivamente gli importi:

$$\mu_b = 0{,}00006 \qquad , m_\beta = 14''.$$

Infine, se di un triangolo si misura il lato c e gli angoli α e β, gli errori medi dei lati a, b e dell'angolo γ, si ottengono facilmente applicando le nozioni esposte; si arriva così alle (tenendo le notazioni dell'esercizio precedente):

$$\mu_a^2 = \mu_c^2 + \left\{ \frac{\mathrm{sen}^2\, \beta}{\mathrm{sen}^2\, \alpha\, \mathrm{sen}^2\, (\alpha + \beta)} + \cot^2 (\alpha + \beta) \right\} m^2 \cdot \mathrm{arc}^2\, 1'' \qquad [69]$$

$$m_\gamma = m \sqrt{2} \qquad [70]$$

ed una terza analoga alla [69] ottenuta da questa scambiando a in b e α in β.

Nel caso particolare in cui $\alpha = \beta$ e $\mu_c = 0$ si hanno le

$$\mu_a = \mu_b = m \cdot \mathrm{arc}\, 1'' \cdot \sqrt{1 + 2 \cot^2 2\alpha} \qquad [71]$$

ed introducendo l'angolo $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$ quest'ultima diviene:

$$\mu_a = \mu_b = m \cdot \mathrm{arc}\, 1''. \sqrt{1 + 2 \cot^2 \gamma}$$

la quale ci dice, per la presenza della $\cot \gamma$: *quando l'angolo γ è piccolissimo gli errori relativi sui lati possono diventare grandissimi.*

Rimane così giustificato il perchè nelle triangolazioni si cerca di costruire triangoli di forma equilatera.

Particolarizzando ulteriormente e ponendo:

$$\mu_c = 0 \qquad \alpha + \beta = 90^\circ$$

risultano le:

$$\mu_a = \text{arc } 1'' \cdot \cot \alpha$$

$$\mu_b = \text{arc } 1'' \cdot \cot \beta$$

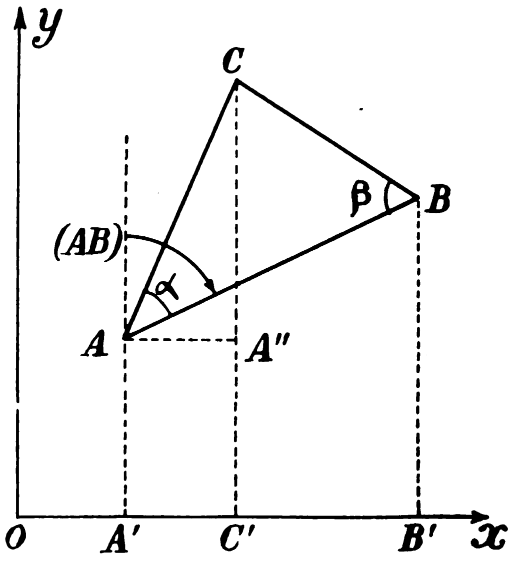
dalle quali:

$$\mu_a : \mu_b = \cot \alpha : \cot \beta$$

ossia

Regola XXIII: *Gli errori relativi sui lati risultano proporzionali alle cotangenti degli angoli opposti; pertanto l'errore relativo risulta maggiore sul lato più piccolo, opposto all'angolo più piccolo.*

§ 20. – ***Precisioni conseguibili con i metodi della intersezione in avanti ed intersezione laterale nella determinazione planimetrica di punti.*** Come è noto se sono date le posizioni planimetriche di due punti A, B mediante coordinate cartesiane ortogonali, la posizione di un terzo punto C potrà determinarsi misurando in A e B gli angoli α e β che la $A\,B$ forma con le $A\,C$ e $B\,C$ (*intersezione in avanti*). Le formule che risolvono il problema sono:



$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_a + b \cdot \text{sen}\,\{(A\,B) - \alpha\} \\ y_c &= y_a + b \cdot \cos\,\{(A\,B) - \alpha\} \end{aligned}\right\} \qquad [72]$$

e per controllo:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_b - a \cdot \text{sen}\,\{(A\,B) + \beta\} \\ y_c &= y_b - a \cdot \cos\,\{(A\,B) + \beta\} \end{aligned}\right\} \qquad [73]$$

e dove $(A\ B)$ si trae dalla formula:

$$\text{tang}\,(A\ B) = \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}$$

ed i lati b ed a si traggono dal triangolo $A\,B\,C$ applicando il Teorema dei seni, essendo il lato c dato dalle:

$$c = \frac{y_b - y_a}{\cos\,(A\,B)} = \frac{x_b - x_a}{\text{sen}\,(A\,B)}\ .$$

In questo problema se si misura uno solo dei due angoli α e β e l'angolo γ si dice che il punto C viene determinato per ***intersezione laterale.***

Il procedimento che si segue per la determinazione delle coordinate di C in questo caso è analogo al precedente in quanto misurati, per es.: α e γ, β risulta dalla

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma. \qquad [74]$$

Interessante ai fini applicativi è di esaminare le precisioni conseguibili in questi due metodi e vedere quale dei due è praticamente da preferire.

Immaginando le coordinate di A e B prive di errori, privo di errori risulterà l'azimut $A\,B$ e così pure la lunghezza del lato AB, sicchè dalla [73], calcolando gli errori parziali incrementando α e β, e sommandone i loro quadrati, avremo:

$$m_{x_c}^2 = m_a^2 \operatorname{sen}^2 \{ (AB) + \beta \} + a^2 \cos^2 \{ (AB) + \beta \} \cdot m_\beta^2$$

$$m_{y_c}^2 = m_a^2 \cos^2 \{ (AB) + \beta \} + a^2 \operatorname{sen}^2 \{ (AB) + \beta \} \cdot m_\beta^2$$

ed addizionando membro a membro l'errore M della posizione planimetrica di C risulta dato dalla:

$$M^2 = m_a^2 + a^2 m_\beta^2 \qquad [75]$$

e poichè:

$$a = c \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$$

in base alla [69] del paragrafo precedente essendo in questo caso $m_c = 0$

$$m_a^2 = a^2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 (\alpha + \beta)} + \cot^2 (\alpha + \beta) \right\} m''^2 \operatorname{arc}^2 1'' \qquad [76]$$

mentre col metodo della intersezione laterale risultando:

$$a = c \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$$

per la [66] del § 19 risulta:

$$m_a^2 = a^2 \left\{ \cot^2 \alpha + \cot^2 \gamma \right\} m''^2 \operatorname{arc}^2 1''. \qquad [77]$$

L'errore m_β tenendo conto della [74] viene espresso dalla:

$$m_\beta^2 = m_\alpha^2 + m_\gamma^2 = 2\, m^2.$$

Tenendo conto di questi risultati la [75] fornisce per i due metodi:

$$M^2_{\text{int. av.}} = a^2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 (\alpha + \beta)} + \cot^2 (\alpha + \beta) + 1 \right\} m''^2 \operatorname{arc}^2 1''$$

$$M^2_{\text{int. lat.}} = a^2 \left\{ \cot^2 \alpha + \cot^2 \gamma + 2 \right\} m''^2 \operatorname{arc}^2 1''$$

od anche:

$$\left.\begin{aligned} M^2_{\text{int. av.}} &= \frac{m''^2 \operatorname{arc}^2 1''}{\operatorname{sen}^2 \gamma} (a^2 + b^2) \\ M^2_{\text{int. lat.}} &= \frac{m''^2 \operatorname{arc}^2 1''}{\operatorname{sen}^2 \gamma} (a^2 + c^2) \end{aligned}\right\} \qquad [78]$$

Le formule [78] così ottenute si prestano al confronto che ci siamo proposti: facendo il rapporto delle dette [78] otteniamo:

$$R = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$$

dal quale possiamo trarre la

Regola XXIV: *Se* $b = c$, $R = 1$, *ed è indifferente adoperare o l'uno o l'altro dei due metodi; se* $b > c$, $R > 1$ *ed il secondo metodo è più conveniente del primo; inversamente se è* $b < c$ *in quanto risulta* $R < 1$. *In altre parole per tutti i punti interni al cerchio di raggio* **c** *e di centro* **A** *è conveniente l'intersezione in avanti; per tutti i punti ad esso esterni quello della intersezione laterale. Per i punti della circonferenza è indifferente l'impiego di uno o dell'altro metodo.*