# TEORIA DELLA BILANCIA DI TORSIONE

## § 1. – RICHIAMI ANALITICI.

*a*) ESPRESSIONI DEI RAGGI DI CURVATURA PER LE SEZIONI NORMALI DELLE SUPERFICIE DI LIVELLO.

Dalla Geodesia è noto che cosa si intende per superficie di livello ed è pure nota la sua equazione:

$$F(x, y, z) = \varepsilon \int_{\tau} \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{costante} \tag{1}$$

con riferimento ad un sistema di assi ortogonali cartesiani con origine nel centro della terra, con asse delle $z$ coincidente coll'asse di rotazione ed il piano $x$, $y$ piano equatoriale.

Le componenti della accelerazione della gravità lungo gli assi di tale terna sono date dalle:

$$g_x = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad g_y = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad g_z = \frac{\partial F}{\partial z} \tag{2}$$

mentre la intensità della $g$ viene determinata con la:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \tag{3}$$

Nella Teoria della Bilancia di torsione anzichè la terna di riferimento di cui ora si è fatto cenno, si considera un sistema di riferimento trirettangolare denominato *sistema topografico* ed avente: l'origine coincidente con un punto $P$ della superficie equipotenziale considerata (geoide), l'asse delle $z$ coincidente con la normale alla superficie (verticale) e con direzione positiva nella direzione in cui trovasi il centro della terra, l'asse delle $x$ orizzontale e nella direzione del meridiano magnetico, determinato dalla direzione dell'ago calamitato, e l'asse delle $y$, normale all'asse $x$, sul piano orizzontale passante per $P$, col verso positivo in direzione del punto cardinale est.

Se invece di riferire l'asse delle $x$ al meridiano magnetico lo si riferisce al meridiano geografico, sempre tenendo l'asse delle $z$ coincidente colla direzione

della verticale passante per l'origine, si ottiene il sistema di riferimento denominato *sistema geoidico*.

La (1) riferita al sistema topografico si suol indicare con la lettera $U$, e le sue derivate parziali rispetto ad $x$, $y$, $z$, $xx$, $xy$, $xz$, ecc., si rappresentano con i simboli:

$$U_x,\ U_y,\ U_z,\ U_{xx},\ U_{xy},\ U_{xz},\ \text{ecc.}$$

Le componenti della gravità rispetto ai tre assi coordinati del sistema topografico sono adunque, per le (2):

$$g_x = U_x, \quad g_y = U_y, \quad g_z = U_z \tag{4}$$

e corrispondentemente:

$$g = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}\,. \tag{5}$$

Con riferimento all'origine $P$ le (4) diventano:

$$g_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_P = O, \qquad g_y = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_P = O, \qquad g_z = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_P = g\,. \tag{6}$$

Considerando ulteriormente una *sezione normale* della $U$ passante per $P$, cioè una sezione fatta con un piano contenente la normale $z$ alla superficie, la normale in $P$ alla sezione normale coincide coll'asse $z$ e conseguentemente i coseni direttori delle due normali – normale alla sezione normale e normale alla superficie, cioè asse $z$ – risultano eguali.

Indicato con $R$ il *raggio di curvatura* della sezione considerata e $ds$ il suo elemento d'arco, tali coseni direttori sono espressi dalle:

$$R\,\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \qquad R\,\frac{d^2y}{ds^2} = 0, \qquad R\,\frac{d^2z}{ds^2} = 1. \tag{7}$$

Derivando una volta e due volte l'equazione della superficie:

$$U(x, y, z) = 0$$

rispetto all'arco $s$, si hanno le:

$$U_x\,\frac{dx}{ds} + U_y\,\frac{dy}{ds} + U_z\,\frac{dz}{ds} = O \tag{8}$$

$$U_{xx}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + U_{yy}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + U_{zz}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + 2\,U_{xy}\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds} + 2\,U_{xz}\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dz}{ds} + \tag{8'}$$

$$+ 2\,U_{yz}\,\frac{dy}{ds}\,\frac{dz}{ds} + U_x\,\frac{d^2x}{ds^2} + U_y\,\frac{d^2y}{ds^2} + U_z\,\frac{d^2z}{ds^2} = O.$$

Osserviamo ora che tenendo conto della particolare scelta degli assi, valgono le (6), inoltre :

$$\frac{d\,z}{d\,s} = 0$$

in quanto l'elemento $d\,s$ è normale all'asse $z$, e :

$$\frac{d\,x}{d\,s} = \cos\alpha \qquad \frac{d\,y}{d\,s} = \operatorname{sen}\alpha$$

con $\alpha$ angolo che l'elemento $d\,s$ forma coll'asse $x$ (*azimut* della sezione normale in $P$).

Con ciò dalla (8′) si trae :

$$(9) \qquad \frac{1}{R_\alpha} = -\frac{U_{xx}\cos^2\alpha + 2\,U_{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + U_{yy}\operatorname{sen}^2\alpha}{g} \,.$$

Ponendo : prima $\alpha = o$ e poi $\alpha = \pi/2$ si ottengono dalla (9) per le curvature delle sezioni normali coincidenti coi piani $x\,z$ e $y\,z$ della terna di riferimento, le espressioni :

$$(10) \qquad \frac{1}{R_x} = -\frac{U_{xx}}{g} \qquad \frac{1}{R_y} = -\frac{U_{yy}}{g} \,.$$

Gli azimut $\theta$ a cui corrispondono *le curvature massima e minima* si ottengono eguagliando a zero la derivata della (9) fatta rispetto ad $\alpha$. Operando così si trova facilmente :

$$(11) \qquad \operatorname{tg} 2\,\theta = \frac{2\,U_{xy}}{U_{xx} - U_{yy}} \,.$$

La (11) dà per $\theta$ due valori a cui corrispondono due direzioni fra loro normali, aventi : una la curvatura minima, ed una la curvatura massima (*sezioni normali principali*).

Le espressioni di queste curvature si ottengono eliminando $\theta$ fra le (9) e (11) ove si ponga nella (9) $\theta$ in luogo di $\alpha$ o reciprocamente nella (11) $\alpha$ in luogo di $\theta$ ed eliminando $\alpha$.

Poste, come generalmente si usa :

$$(12) \qquad U_{xx} - U_{yy} = U_\Delta$$

osserviamo che le precedenti equazioni si possono scrivere sotto le forme :

$$\begin{cases} -U_\Delta\cos 2\,\theta - 2\,U_{xy}\operatorname{sen} 2\,\theta = 2\,g/R + (U_{xx} + U_{yy}) \\ U_\Delta\operatorname{sen} 2\,\theta - 2\,U_{xy}\cos 2\,\theta = 0 \end{cases}$$

da cui quadrando e sommando:

$$U^2_\Delta + (2\,U_{xy})^2 = \{\, 2\,g/R + (U_{xx} + U_{yy})\,\}^2$$

e da questa le seguenti espressioni per $\frac{1}{R_1}$ , $\frac{1}{R_2}$ (massima e minima):

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{R_1}\\ \frac{1}{R_2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\,g}\left\{ -(U_{xx} + U_{yy}) \pm \sqrt{U^2_\Delta + (2\,U_{xy})^2}\right\}. \tag{13}$$

L'Eötvös indica con $K$ la quantità $\sqrt{U^2_\Delta + (2\,U_{xy})^2}$ e la denomina *curvatura*.

Il significato di questo parametro scende dalle (13) sottraendo membro a membro le due espressioni. Si ottiene così:

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{K}{g} \tag{13'}$$

e che rappresenta lo *scostamento* della superficie $U$ dalla figura sferica.

Dalle stesse (13) scende poi, addizionando membro a membro e tenendo conto della (10), la nota relazione:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{g}\,(U_{xx} + U_{yy}) = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\,.$$

Eliminando dalle (9) e (11) la derivata mista $U_{xy}$ si trova:

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\frac{U_{xx}\,(\cos^2\alpha + \operatorname{tg} 2\theta \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + U_{yy}\,(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{tg} 2\theta \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{g}$$

e tenendo conto delle (10):

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{R_x}\,(\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\theta \operatorname{sen} 2\alpha) + \frac{1}{R_y}\,(\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\theta \operatorname{sen} 2\alpha). \tag{14}$$

Se gli assi $x$ ed $y$ coincidono con le tangenti alle sezioni principali, $R_1$ e $R_2$ si identificano con $R_x$ e $R_y$, $\theta = 0^o$ e la (14) fornisce il noto *Teorema di Eulero*:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{R_2}$$

che permette di ricavare la curvatura della sezione normale di azimut $\alpha$ per mezzo delle curvature delle sezioni principali.

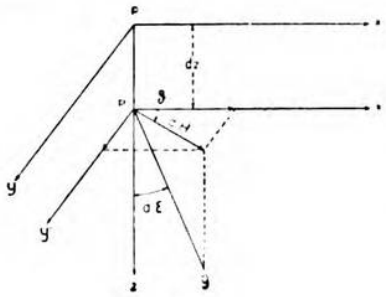
*b*) GRADIENTE GRAVIMETRICO E CURVATURA.

Scendendo da $P$ in $P'$ lungo l'asse delle $z$, *le componenti della gravità in* $P'$ diventano :

$$g'_x = U_{xz}\, d\,z, \qquad g'_y = U_{yz}\, d\,z, \qquad g'_z = g + U_{zz}\, d\,z\,.$$

In particolare poi la *componente orizzontale* che in $P$ era di valore nullo diviene ora in $P'$ :

$$d\,H = \sqrt{U^2_{xz} + U^2_{yz}}\, d\,z\ ;$$



la quantità :

$$G = \sqrt{U^2_{xz} + U^2_{yz}} \tag{15}$$

prende il nome di *gradiente orizzontale della gravità.*

Tenendo conto della (15) la precedente diviene :

$$d\,H = G\ .\ d\,z\,. \tag{16}$$

Indicato con $d\,\varepsilon$ l'angolo che la gravità $g'$ in $P'$ forma sull'asse $z$ si ha (cnfr. figura) :

$$d\,H = g'\ .\ \text{sen}\ (d\,\varepsilon)$$

ed a meno di quantità infinitesime di ordine superiore, sostituendo al seno l'arco :

$$d\,H = g'\ .\ d\ \varepsilon\,.$$

Però $z$ e $g'$ sono tangenti (infinitamente vicine) alla *linea di forza* passante per $P$ e $d\,\varepsilon$ ne è l'*angolo di contingenza* ; ne consegue che *la curvatura in P di detta linea di forza* è data dalla :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\ \varepsilon}{d\ z} = \frac{G}{g}\ . \tag{17}$$

Formula importante che permette il calcolo del raggio di curvatura della linea di forza in $P$ per mezzo del gradiente $G$ e della gravità $g$ osservata in $P$.

Inoltre, poichè il piano osculatore alla detta linea contiene $d\,H$, ne risulta che l'*azimut* $\vartheta$ *del gradiente* è pure azimut del piano osculatore alla linea di forza.

Detto angolo si ricava subito : dall'esame della figura si hanno infatti le :

$$\cos\vartheta = \frac{U_{xz}}{G} \qquad \text{sen}\,\vartheta = \frac{U_{yz}}{G} \tag{18}$$

che permettono la determinazione della *direzione del gradiente.*

Considerando $G$ come un vettore, la sua direzione ci indica, tra tutte le direzioni, quella secondo la quale la funzione subisce la massima variazione e col suo modulo ci dà il coefficiente di variazione della funzione, ossia della $\Delta g$ in quella direzione.

Con le formule stabilite, adunque, se fossero note le derivate parziali $U_{xz}$, $U_{yz}$, $U_{\Delta}$, $U_{xy}$ della funzione potenziale e la gravità in un punto $P$ della superficie di livello, sarebbero possibili la seguenti determinazioni:

*a*) intensità del gradiente $G$, formula (15);
*b*) azimut del gradiente $\vartheta$, formule (18);
*c*) curvatura della linea di forza, formula (17);
*d*) curvatura eötvössiana $K$, data dalla $\sqrt{U^2_{\Delta} + (2\,U_{xy})^2}$ o dalla equivalente:

$$g\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

*e*) azimut della $K$, ossia l'azimut $\theta$ delle sezioni principali mediante la formula (11).

Se inoltre è noto anche il *gradiente verticale della gravità* cioè:

$$\frac{d\,g}{d\,z} = U_{zz} \tag{19}$$

riesce possibile ricavare le espressioni separate di $U_{xx}$ e $U_{yy}$; basta a tale uopo ricordare che l'operazione di Laplace:

$$\underset{2}{\Delta} = \frac{\delta^2}{\delta\,x^2} + \frac{\delta^2}{\delta\,y^2} + \frac{\delta^2}{\delta\,z^2}$$

applicata alla (1) porta alla:

$$\Delta_2\,F = 2\,.\,\omega^2$$

con $\omega^2$, quadrato della velocità angolare, costante. Applicando alla $U$, trasformata della $F$, l'operazione di Laplace si ottiene egualmente:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 2\,.\,\omega^2$$

dalla quale scende la:

$$U_{xx} + U_{yy} = 2\,.\,\omega^2 - U_{zz}$$

indi associare questa alla:

$$U_{xx} - U_{yy} = U_{\Delta}\,.$$

Risolvendo queste due ultime rispetto $U_{xx}$ e $U_{yy}$ si trova facilmente:

$$(20)\qquad \begin{cases} U_{xx} = \omega^2 + \dfrac{U_\Delta - U_{zz}}{2} \\ U_{yy} = \omega^2 - \dfrac{U_\Delta + U_{zz}}{2} \end{cases}$$

Con queste è possibile conseguentemente calcolare:

*f*) le curvature delle sezioni coordinate, formule (10);
*g*) le curvature delle sezioni principali, formule (13).

(*Continua*).

Prof. GIOVANNI BOAGA
Geodeta Capo dell' I. G. M.