SULLA COSTRUZIONE DELLE TAVOLE AUSILIARIE PER IL CALCOLO DELLE POSIZIONI GEOGRAFICHE SULL'ELLISSOIDE INTERNAZIONALE DI HAYFORD

Immaginiamo segnato sull'ellissoide terrestre un arco di geodetica $M\ M_1$ di lunghezza S e di coordinate geografiche: latitudine, longitudine ed azimut nei punti estremi $L\ P\ Z$, $L_1\ P_1\ Z_1$.

Uno dei problemi fondamentali della Geodesia operativa è, come è noto, quello relativo al trasporto della latitudine, longitudine ed azimut lungo l'arco di geodetica S ossia determinare $L_1\ P_1\ Z_1$ in funzione di $L\ P\ Z$ e delle costanti dell'ellissoide terrestre.

L' Istituto Geografico Militare per il calcolo del trasporto della latitudine e della longitudine lungo i lati della triangolazione di primo ordine ha adottato le *formule di Delambre* ricavate dagli sviluppi accorciati di Legendre includendovi i termini del quarto ordine rispetto al rapporto della lunghezza dell'arco di geodetica al raggio terrestre nel punto dato M e riguardando anche come quantità del primo ordine il quadrato e^2 della eccentricità dell'ellissoide terrestre.

Tali formule, ordinate nel modo che meglio si presta al calcolo, sono:

$$\begin{cases} L_1 - L = \Delta L = Au + Bu^2 + Cu^3 + Dv^2 + E\,u\,v^2 + F\,u^2\,v^2 + G\,v^4 \\ P_1 - P = \Delta P = A_1\,v + B_1\,u\,v + C_1\,u^2\,v + D_1\,v^3 + E_1\,u\,v^3 + F_1\,u^3\,v \end{cases}$$

con

$$u = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}}{a_0} \cdot S \cdot \cos Z \qquad v = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}}{a_0} \cdot S \cdot \operatorname{sen} Z$$

dove a_0 rappresenta il raggio equatoriale dell'ellissoide terrestre.

I coefficienti $A\ B\ C$ ...... $A_1\ B_1\ C_1$ ...... sono poi definiti dalle

$$A = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''}$$

$$B = -\frac{3\,e^2\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L)}{4\,(1 - e^2)^2 \operatorname{arc} 1''} \cdot \operatorname{sen} 2\,L$$

$$C = -\frac{e^2}{2} \cdot \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{(1 - e^2)^2 \operatorname{arc} 1''} \cdot \cos 2\,L$$

$$D = -\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{2(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''} \cdot \operatorname{tang} L$$

$$E = -\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{6(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''} \left\{ 1 + 3 \operatorname{tang}^2 L + \frac{e^2}{1 - e^2} (5 \cos 2 L - 4) \right\}$$

$$F = -\frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{6(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''} (2 + 3 \operatorname{tang}^2 L) \operatorname{tang} L$$

$$G = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{24(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''} (1 + 3 \operatorname{tang}^2 L) \operatorname{tang} L$$

$$A_1 = \frac{1}{\cos L \cdot \operatorname{arc} 1''}$$

$$B_1 = \frac{\operatorname{tang} L}{\cos L \cdot \operatorname{arc} 1''}$$

$$C_1 = \frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L}{3 \cos L \cdot \operatorname{arc} 1''} \left\{ 1 + \frac{\frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 L}{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L} \right\}$$

$$D_1 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{tang}^2 L}{\cos L \cdot \operatorname{arc} 1''}$$

$$E_1 = -\frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L}{3 \cos L \cdot \operatorname{arc} 1''} \cdot \operatorname{tang} L$$

$$F_1 = \frac{2 + 3 \operatorname{tang}^2 L}{3 \cos L \cdot \operatorname{arc.} 1''} \cdot \operatorname{tang} L \; .$$

Per il calcolo logaritmo, allo scopo di utilizzare per quanto possibile le parti che successivamente vengono calcolate, sono stati introdotti come fattori i rapporti fra due coefficienti consecutivi in modo che le costanti che effettivamente entrano nel *Modello di calcolo* sono, all' infuori del segno, indicati con numeri romani progressivi come segue:

$$I = \frac{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}}{a_0}$$

$$II = A = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''}$$

$$III = \frac{B}{A} = \frac{3}{4} \frac{e^2}{1 - e^2} \operatorname{sen} 2 L$$

$$IV = \frac{C}{B} = \frac{2}{3} \cot 2\,L$$

$$V = \frac{E}{D} = \frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L}{3 \operatorname{tang} L} \left\{ 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{5 \cos 2\,L - 4}{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L} \right\}$$

$$VI = \frac{F}{E} = \frac{(2 + 3 \operatorname{tang}^2 L) \,.\, \operatorname{tang} L}{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L} \cdot \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{5 \cos 2\,L - 4}{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L} \right\}}$$

$$VII = \mathrm{G} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L}{(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''} (1 + 3 \operatorname{tang}^2 L) \,.\, \operatorname{tang} L$$

$$VIII = \frac{C_1}{B_1} = \frac{1}{3 \operatorname{tang} L} \left\{ 1 + 3 \operatorname{tang}^2 L + \frac{e^2}{1 - e^2} \,.\, \cos^2 L \right\}$$

$$IX = D_1 = \frac{\operatorname{tang}^2 L}{3 \cos L \,.\, \operatorname{arc} 1''}$$

$$X = \frac{E_1}{D_1} = \frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 L}{\operatorname{tang} L}$$

$$XI = F_1 = \frac{(2 + 3 \operatorname{tang}^2 L) \operatorname{tang} L}{3 \cos L \,.\, \operatorname{arc} 1''} \,.$$

Fu poi con i dati dell'ellissoide di Bessel costruita una *Tavola ausiliaria*, allegata al *Modulo dei calcoli*, contenenti i logaritmi delle quantità I, II, ... XI prendendo come argomento la latitudine e variando questa di 10′ in 10′ da 36° a 47° latitudini estreme fra le quali è compresa l' Italia.

I logaritmi delle quantità I e II sono stati riportati con 7 cifre decimali e indicata, per l'arrotondamento nei calcoli, l'ottava cifra ; i logaritmi delle quantità III, V, VIII, IX sono stati trascritti con 5 cifre decimali e indicata per l'arrotondamento la sesta cifra ; i logaritmi delle altre quantità sono state riportate con 3 cifre decimali, con l' indicazione pure della cifra successiva.

Il limite massimo di distanza S per la quale possono venire impiegate le formule del Modulo, con piena sicurezza di raggiungere l'approssimazione di circa 0″, 00015 in ogni singolo termine di correzione e conseguentemente di avere un errore certamente minore di 0″, 0005 nei risultati è di circa 90 km. Tale limite sale a 150 km se si desidera avere la precisione solo nei centesimi di secondo.

Per quanto concerne l'azimut si adopera la formula

$$Z_1 = Z + 180^\circ + \Delta z$$

dove Δz si ricava dal *Teorema di Dalby*:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta z = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (L + L_1)}{\cos \frac{1}{2} (L_1 - L)} \, . \, \operatorname{tang} \frac{1}{2} (P_1 - P)$$

o per piccole distanze dalla equivalente:

$$\Delta z'' = \operatorname{sen} \frac{1}{2} (L + L_1) \, . \, (\Delta P)''.$$

Volendo rifare i calcoli onde determinare le coordinate dei vertici della triangolazione di primo ordine riferiti non più all'ellissoide di Bessel, ma a quello internazionale di Hayford e desiderando nel calcolo seguire le Istruzioni contenute nel Modulo citato, è naturale che come primo lavoro si dovrà costruire una *Tavola Ausiliaria* contenente i logaritmi delle quantità I, II, ... XI per latitudini variabili di 10′ in 10′ da 36° a 47°.

È ovvio che tale problema può essere affrontato in due modi:

a) calcolare direttamente i logaritmi delle quantità I, II, ... XI in base alle definizioni dianzi riportate introducendo per a_0 e e^2 i valori dell'ellissoide internazionale.

$$a_n = 6\,378\,388 \text{ m. (semi asse equatoriale)}$$

$$e_n^2 = 0{,}006\,722\,670 \text{ (quadrato della eccentricità)};$$

oppure:

b) calcolare quali correzioni logaritmiche si devono aggiungere ai logaritmi delle quantità I, II, ... XI già calcolate per l'ellissoide di Bessel per ottenere gli analoghi per l'ellissoide internazionale.

Poichè in un precedente lavoro pubblicato su « L' Universo » (f. 5 anno 1940) abbiamo trattato una questione analoga per il calcolo dei raggi principali di curvatura sull'ellissoide di Hayford impiegando a tale scopo i valori calcolati per l'ellissoide di Bessel, così abbiamo ritenuto opportuno risolvere il citato problema nel secondo caso.

Qui di seguito esponiamo brevemente il metodo seguito ed i risultati dei calcoli ottenuti.

Passando ai logaritmi l'espressione I si ha:

$$ln\, I = \frac{1}{2}\, ln\, (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 L) - ln\, a_0$$

con *ln* abbreviazione di logaritmo neperiano.

Variando la precedente rispetto e^2 e a_0 e moltiplicando i due membri per μ (= 0,4342945) modulo dei logaritmi neperiani, onde passare da questi a quelli decimali, che indicheremo con la notazione *log*, si ottiene

$$\delta\,(\log \mathrm{I}) = -\frac{\mathrm{sen}^2 L}{2\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2 L)}\,.\,\mu\,.\,\delta\,e^2 - \frac{\mu\,\delta\,a_0}{a_0}\,.$$

Il primo addendo del secondo membro è una funzione della latitudine, si potrà dunque porre brevemente:

$$F\,(L) = \frac{\mathrm{sen}^2 L}{2\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2 L)}\,.\,\mu\,.\,\delta\,e^2\,.$$

Passando ai numeri poichè

$$\delta\,e^2 = e^2_{\mathrm{H}} - e^2_{\mathrm{B}} = 0{,}000048297$$

per latitudini comprese fra 36° e 47° si hanno i seguenti valori per la $F\,(L)$:

L	$F\,(L)$	L	$F\,(L)$
36°	36.3	42°	47.1
37	38.1	43	48.9
38	39.8	44	50.8
39	41.6	45	52.6
40	43.4	46	54.5
41	45.3	47	56.3

espresse in unità della settima cifra logaritmica.

Il secondo termine del secondo membro della δ (log I) è costante; poichè $\delta\,a_0 = a_{\mathrm{H}} - a_{\mathrm{B}} = 990^{\mathrm{m}},84$ esso è dell' importo 674,7 sempre in unità della settima cifra decimale logaritmica.

Così, per la prima correzione si ha intanto

[1] $$\delta\,(\log \mathrm{I}) = -674.7 - F\,(L)$$

Con procedimento perfettamente analogo si ricava

$$\delta\,(\log \mathrm{II}) = \frac{\mu}{1 - e^2}\,.\,\delta\,e^2 - 2\,F\,(L).$$

e passando ai numeri

[2] $$\delta\,(\log \mathrm{II}) = 211{,}1 - 2\,F\,(L)$$

e analogamente

$$[3] \qquad \delta\,(\log \mathrm{III}) = \frac{\mu}{e^2\,(1 - e^2)}\,.\,\delta\, e^2 = 315{,}3\ .$$

Quest'ultima in unità della quinta cifra decimale.

Dalla [3] si conclude che per passare dai log III calcolati con i dati di Bessel a quelli analoghi calcolati con i dati di Hayford, basta ai primi aggiungere, per qualunque latitudine, l' importo 315,3.

Le funzioni IV, IX, X, XI essendo indipendenti da e^2 hanno correzioni nulle.

Per quanto concerne la V osserviamo che risultando il coefficiente $\frac{e^2}{1 - e^2}$ molto minore di uno ed il fattore che l'accompagna per qualche latitudine di poco superiore ad uno, potremo passare la V stessa ai logaritmi e sviluppare in serie il

$$ln \left\{ 1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\,.\,\frac{5 \cos 2\,L - 4}{1 + 3\ \mathrm{tang}^2\,L} \right\}$$

arrestando lo sviluppo al primo termine della serie. Operando così, variando e moltiplicando i due membri per μ si trova

$$[4] \qquad \delta\,(\log \mathrm{V}) = \frac{\mu\,.\,\delta\, e^2}{(1 - e^2)^2}\,.\,\frac{5 \cos 2\,L - 4}{1 + 3\ \mathrm{tang}^2\,L}\ .$$

Il valore del coefficiente costante è 212,5; i valori invece del termine variabile con la latitudine

$$\Psi\,(L) = \frac{5 \cos 2\,L - 4}{1 + 3\ \mathrm{tang}^2\,L}$$

sono raccolti nello specchio

L	$\Psi\,(L)$	L	$\Psi\,(L)$
36°	— 0.9501	42°	— 1.0131
37	— 0.9697	43	— 1.0117
38	— 0.9855	44	— 1.0073
39	— 0.9977	45	— 1.0000
40	— 1.0063	46	— 0.9071
41	— 1.0113	47	— 0.8205

Si osservi che il valore 212,5 è riferito alla settima cifra decimale, però log V va calcolato con cinque cifre, perciò in questo ordine la [4] assume la forma

$$[4]' \qquad \delta\,(\log \mathrm{V}) = 2,125\ .\ \Psi\,(L).$$

Se nello sviluppo in serie citato si considera anche il termine di secondo ordine, tale termine essendo rappresentato dalla

$$\frac{\mu\, e^2\ .\ \delta\, e^2}{(1 - e^2)^3}\ .\ \left\{ \Psi\ (L) \right\}^2$$

porta, per le latitudini considerate, un contributo logaritmico massimo di $1{,}5 \times 10^{-7}$ e quindi trascurabile ai nostri effetti.

Ripetendo analogo procedimento per la VI si trova

$$[5] \qquad \delta\,(\log \mathrm{VI}) = -\,\delta\,(\log \mathrm{V})$$

solo qui bisogna notare che è sufficiente considerare tre cifre decimali e poichè la correzione δ (log V) non supera $2{,}5 \times 10^{-5}$ si conclude che la correzione del *log VI* è nulla.

Per la espressione VII si vede immediatamente che deve risultare

$$[6] \qquad \delta\,(\log \mathrm{VII}) = \delta\,(\log \mathrm{II})$$

in quanto le due espressioni hanno identico il fattore variabile ; per la variazione del *log VII* però bastano considerare 3 cifre decimali. Come risulta poi dall'esame dei risultati di cui alla Tav. I si può concludere che per le latitudini in cui è compresa l' Italia questa correzione è pure praticamente nulla.

Per la VIII con trattamento identico a quello fatto per la V, sviluppando in serie dopo aver raccolto a fattor comune $(1+3 \operatorname{tang}^2 L)$, ecc., si trova

$$\delta\,(\log \mathrm{VIII}) = \frac{\mu\ .\ \delta\, e^2}{(1 - e^2)^2}\ .\ \frac{\cos^2 L}{(1 + 3 \operatorname{tang}^2 L)\ 3 \operatorname{tang} L}$$

e posto :

$$\chi\,(L) = \frac{\cos^2 L}{(1 + 3 \operatorname{tang}^2 L)\ 3 \operatorname{tang} L}$$

risulta

$$[7] \qquad \delta\,(\log \mathrm{VIII}) = 2{,}125\ .\ \chi\,(L)$$

dove i valori della $\chi\,(L)$ sono raccolti nel seguente quadro :

L	$\chi(L)$	L	$\chi(L)$
36°	0.1162	42°	0.0596
37	0.1043	43	0.0530
38	0.0936	44	0.0470
39	0.0834	45	0.0417
40	0.0732	46	0.0368
41	0.0669	47	0.0325 .

In base alle formule [1], [2], ... [7] abbiamo calcolate le correzioni logaritmiche riportate nella *Tav. I*. Dall'esame di questa Tavola si vede che essa può servire, mediante interpolazione, per la determinazione delle correzioni da applicare ai logaritmi delle note quantità quando la latitudine varia di 10′ in 10′ e quindi riesce possibile ricavare la Tavola che ci siamo proposti. Per facilitare questo compito sono state scritte nella Tav. I per le singole variazioni logaritmiche i contributi corrispondenti a differenze di 10′.

Nella *Tav. II* abbiamo voluto riportare di grado in grado i logaritmi delle quantità I, II, ... XI calcolate con gli elementi dell'ellissoide di Bessel, e nella *Tav. III* i logaritmi delle medesime quantità per l'ellissoide di Hayford ottenuti applicando ai valori della Tav. II le correzioni da noi stabilite.

In questo stesso ordine di idee può risultare utile agli effetti calcolativi risolvere il problema : « supposte calcolate le ΔL, ΔP con le formule di Delambre e supposti noti i logaritmi decimali dei vari monomi messi in evidenza nei secondi membri delle formule stesse, quali correzioni sono necessarie apportare a detti logaritmi per ottenere il trasporto delle posizioni geografiche sull'ellissoide internazionale, in modo da evitare di eseguire il calcolo direttamente sulle originarie formule di Delambre ? ».

È ovvio che così facendo oltre ai termini variabili per il passaggio da un ellissoide all'altro si dovrà considerare ora anche l'eventuale variazione dell'azimut.

Poichè la variazione della latitudine e della longitudine per effetto del cambio di ellissoide non può in generale essere molto forte (raramente raggiungerà 2″) così la variazione della differenza degli azimut reciproci data dalla

$$\delta\,(\Delta\,z)'' = \cos L_m \,.\, \delta\, L \,.\, (\Delta\, P)'' + \operatorname{sen} L_m \,.\, \delta\,(\Delta\, P)''$$

che si trae variando la relazione che discende dal Teorema di Dalby, per $\delta\, L = 2''$, fornisce la

$$\delta\,(\Delta\, z)'' < \delta\,(\Delta\, P)''$$

il che permette di concludere fin d'ora che in molti casi tale variazione non porterà nessun contributo apprezzabile a parecchi logaritmi delle quantità del secondo membro delle formule che forniscono le ΔL, ΔP e ciò specialmente per quei termini i cui logaritmi nel calcolo sono limitati a 2, a 3, a 5 cifre decimali.

Se non si altera l'orientamento della rete per il primo lato della triangolazione, dove in un estremo si sono eseguite le osservazioni astronomiche di latitudine e di azimut, l'azimut ha variazione nulla.

Nei lati successivi aventi un estremo coincidente con il secondo estremo del primo lato variano gli azimut e variano anche le latitudini dei primi estremi (secondo estremo del lato precedente) e così di seguito per modo che nei monomi messi in evidenza nei secondi membri delle formule di Delambre, si dovrebbero apportare anche le variazioni dipendenti dalle variazioni delle latitudini, ma poichè tali variazioni, come risulta anche dall'esame della Tav. II non sono di entità così forti da portare variazione logaritmica alle quantità I, II, ... XI che si utilizzano per il calcolo dei monomi Au, ... $A_1 v$, ...così negli sviluppi che seguono si può non tener conto delle variazioni successive di latitudine per i vari primi estremi dei lati via, via succedentisi.

Ciò premesso, poichè dalla definizione di u e v risulta

$$u = I \, . \, S \, . \cos Z \qquad\qquad v = I \, . \, S \, . \operatorname{sen} Z$$

passando ai logaritmi e variando rispetto I e Z si ottengono le

$$\delta\,(\log u) = \delta\,(\log I) - \frac{\mu}{\rho''} \, . \operatorname{tang} Z \, . \, \delta\, z''$$

$$\delta\,(\log v) = \delta\,(\log I) + \frac{\mu}{\rho''} \, . \cot Z \, . \, \delta\, z''$$

con $\rho'' = 206264'', 8$.

E posto

$$\delta\, z_u = \frac{\mu}{\rho''} \, . \operatorname{tang} z \, . \, \delta\, z''$$

$$\delta\, z_v = \frac{\mu}{\rho''} \, . \cot Z \, . \, \delta\, z''$$

le precedenti assumono le forme

$$[8] \qquad \delta\,(\log u) = \delta\,(\log I) - \delta\, z_u$$

$$[9] \qquad \delta\,(\log v) = \delta\,(\log I) + \delta\, z_v \, .$$

Onde avere una idea circa la entità delle correzioni logaritmiche $\delta\, z_u$, $\delta\, z_v$, abbiamo sottoposto al calcolo la prima per $\delta\, z''$ variabile di 10'' in 10'' da

0″ a 60″, per Z variabile di 5° in 5° da 0° a 90°. I risultati ottenuti espressi in unità della settima cifra decimale sono raccolti nella Tav. IV.

Da questa Tavola si possono poi trarre le variazioni corrispondenti per la δz_v ricordando che la cotangente di un angolo è eguale alla tangente del suo complementare.

Col procedimento indicato si possono ora determinare le correzioni da apportare ai logaritmi dei monomi messi in evidenza nei secondi membri delle formule di Delambre, tenendo, ben inteso, conto delle [8] e [9]. Operando così si ottengono le:

[10] $\delta (\log A \,.\, u) = C_a - \delta z_u$

[11] $\delta (\log B \,.\, u^2) = C_b - 2\,\delta z_u$

[12] $\delta (\log C \,.\, u^3) = C_c - 3\,\delta z_u$

[13] $\delta (\log D \,.\, v^2) = C_d + 2\,\delta z_v$

[14] $\delta (\log E \,.\, u\, v^2) = C_e - \delta z_u + 2\,\delta z_v$

[15] $\delta (\log F \,.\, u^2 v^2) = C_f - 2\,\delta z_u + 2\,\delta z_v$

[16] $\delta (\log G \,.\, v^4) = C_g + 4\,\delta z_v$

[17] $\delta (\log A_1 \,.\, v) = C_{a'} + \delta z_v$

[18] $\delta (\log B_1 \,.\, u\, v) = C_{b'} - \delta z_u + \delta z_v$

[19] $\delta (\log C_1 \,.\, u^2 v) = C_{c'} - 2\,\delta z_u + \delta z_v$

[20] $\delta (\log D_1 \,.\, v^3) = C_{d'} + 3\,\delta z_v$

[21] $\delta (\log E_1 \,.\, u\, v^3) = C_{e'} - \delta z_u + 3\,\delta z_v$

[22] $\delta (\log F_1 \,.\, u^3 v) = C_{f'} - 3\,\delta z_u + \delta z_v$

I coefficienti C_a, C_b, ..., $C_{a'}$, $C_{b'}$, ... risultano conseguentemente definiti dalle:

$$
\begin{aligned}
C_a &= \delta (\log I) + \delta (\log II) \\
C_b &= 2\,\delta (\log I) + \delta (\log II) + \delta (\log III) \\
C_c &= 3\,\delta (\log I) + \delta (\log II) + \delta (\log III) \\
C_d &= 2\,\delta (\log I) + \delta (\log II) \\
C_e &= 3\,\delta (\log I) + \delta (\log II) + \delta (\log V) \\
C_f &= 4\,\delta (\log I) + \delta (\log II) + \delta (\log V) \\
C_g &= 4\,\delta (\log I) + \delta (\log VII) \\
C_{a'} &= \delta (\log I) \\
C_{b'} &= 2\,\delta (\log I) \\
C_{c'} &= 3\,\delta (\log I) + \delta (\log VIII) \\
C_{d'} &= 3\,\delta (\log I) \\
C_{e'} &= 4\,\delta (\log I) \\
C_{f'} &= 4\,\delta (\log I)\,.
\end{aligned}
$$

Come si vede esse si possono facilmente tabulare; rammentiamo che per il calcolo non è necessario esprimere tutte le correzioni C con 7 cifre decimali. L'ordine di grandezza varia coll'ordine del termine a cui tale correzione si riferisce. Così basterà assegnare 7 cifre decimali alle correzioni $C_{\mathbf{a}}$, $C_{\mathbf{a}'}$; 6 cifre alle $C_{\mathbf{d}}$, $C_{\mathbf{b}'}$; 4 alle $C_{\mathbf{b}}$, $C_{\mathbf{e}}$, $C_{\mathbf{c}'}$, $C_{\mathbf{d}'}$; 3 alla $C_{\mathbf{c}}$; 2 alle rimanenti, cioè $C_{\mathbf{f}}$, $C_{\mathbf{g}}$, $C_{\mathbf{e}'}$, $C_{\mathbf{f}'}$.

Con lo stesso numero di cifre decimali si prenderanno le correzioni $\delta\, z_{\mathbf{u}}$, $\delta\, z_{\mathbf{v}}$ messe in evidenza corrispondentemente nelle [10], [11], ...[22].

L'importo della variazione $\delta\, z''$ verrà determinato volta per volta.

Nella *Tav. V* sono raccolti i valori delle costanti $C_{\mathbf{a}}$, $C_{\mathbf{b}}$, ... $C_{\mathbf{a}'}$, $C_{\mathbf{b}'}$, ... calcolate al solito per le latitudini variabili di grado in grado da 36° a 47°.

Dalla ispezione di questa Tavola si vede che essa può servire per valori non inseriti nella Tavola stessa mediante opportune interpolazioni.

Questo procedimento di operare, appare forse complicato dalle formule esposte, tuttavia esso è indubbiamente assai più rapido del calcolo diretto anche perchè, come risulta dall'esame della *Tav. V* alcune correzioni si possono ritenere costanti e di piccoli importi per tutte le latitudini (esse sono: $C_{\mathbf{b}}$, $C_{\mathbf{e}}$, $C_{\mathbf{c}'}$, $C_{\mathbf{d}'}$) ed altre ($C_{\mathbf{f}}$, $C_{\mathbf{g}}$, $C_{\mathbf{e}'}$, $C_{\mathbf{f}'}$), fino alle cifre decimali che possono interessare, sono di valore nullo.

Prof. GIOVANNI BOAGA
della R. Università di Pisa.

Pisa, 14-2-1941-XIX.

TAVOLA I.

CORREZIONI LOGARITMICHE PER IL PASSAGGIO DALLE TAVOLE CALCOLATE CON I DATI DELL'ELLISSOIDE DI BESSEL A QUELLE PER L'ELLISSOIDE INTERNAZIONALE DI HAYFORD PER LE QUANTITÀ AUSILIARIE PER IL CALCOLO DELLE POSIZIONI GEOGRAFICHE.

L	δ (log I) 10^7	δ (log II) 10^7	δ (log III) 10^5	δ (log V) 10^5	δ (log VII) 10^5	δ (log VIII) 10^5	L
36°	— 711.0	+ 138.5	+ 316.3	— 2.0	+ 1.4	+ 0.2	36°
37	— 712.8	+ 134.9	»	— 2.1	+ 1.3	+ 0.2	37
38	— 714.5	+ 131.5	»	— 2.1	+ 1.3	+ 0.2	38
39	— 716.3	+ 127.9	»	— 2.1	+ 1.3	+ 0.2	39
40	— 718.1	+ 124.3	»	— 2.1	+ 1.2	+ 0.2	40
41	— 720.0	+ 120.5	»	— 2.1	+ 1.2	+ 0.1	41
42	— 721.8	+ 116.9	»	— 2.2	+ 1.2	+ 0.1	42
43	— 723.6	+ 113.3	»	— 2.1	+ 1.1	+ 0.1	43
44	— 725.5	+ 109.5	»	— 2.1	+ 1.1	+ 0.1	44
45	— 727.3	+ 105.9	»	— 2.1	+ 1.1	+ 0.1	45
46	— 729.2	+ 102.1	»	— 1.9	+ 1.0	+ 0.1	46
47	— 731.0	+ 098.5	»	— 1.7	+ 1.0	+ 0.1	47

TAVOLA II.

LOGARITMI DELLE QUANTITÀ AUSILIARIE PER IL CALCOLO DELLE POSIZIONI GEOGRAFICHE CON LE FORMULE DI DELAMBRE CALCOLATE PER L'ELLISSOIDE DI BESSEL.

L	log I	log II	log III	log IV	log V	log VI	log VII	log VIII	log IX	log X	log XI	L
36°	3.1948552.4	5.3163308.7	7.68058.6	9.335.7	0.07106.0	0.006.0	4.210.0	0.07458.0	4.65186.8	0.551.0	5.345.0	36°
37	8309.9	2823.9	522.2	.281.4	486.0	17.0	45.0	838.0	.68918.4	5.0	81.0	37
38	8064.9	2333.9	928.4	.220.7	916.0	27.0	81.0	.08268.0	.72639.1	9.0	.417.0	38
39	7817.8	1839.7	.69278.4	.151.4	.08394.0	37.0	.317.0	747.0	.76354.0	.564.0	54.0	39
40	7568.9	1341.9	573.2	.070.2	919.0	48.0	53.0	.09269.0	.80067.7	9.0	91.0	40
41	7318.3	0840.7	813.3	8.971.7	.09490.0	58.0	89.0	837.0	.83785.0	.575.6	.529.0	41
42	7066.5	0337.3	999.4	.845.5	.10104.0	68.0	.426.0	.10448.0	.87510.5	.581.0	67.0	42
43	6813.7	5.3159831.7	.70132.1	.668.5	762.0	79.0	63.0	.11101.0	.91248.8	8.0	.606.0	43
44	6560.3	9324.9	211.5	.367.0	.11461.0	89.0	.500.0	796.0	.95004.4	.595.0	46.0	44
45	6306.6	8817.5	238.0	∞	.12201.1	.100.0	38.0	.12530.0	.98781.9	.602.0	87.0	45
46	6052.8	8309.9	211.5	.367.0	.13006.1	.110.0	76.0	.13305.0	5.02585.8	.610.0	.728.0	46
47	5799.9	7802.4	132.1	.668.5	848.6	.121.0	.614.0	.14119.0	.06420.9	8.0	70.0	47

TAVOLA III.

LOGARITMI DELLE QUANTITÀ AUSILIARIE PER IL CALCOLO DELLE POSIZIONI GEOGRAFICHE CON LE FORMULE DI DELAMBRE CALCOLATE CON I DATI DELL'ELLISSOIDE INTERNAZIONALE DI HAYFORD.

L	log I	differ. per 10′	log II	differ. per 10′	log III	differ. per 10′	log V	differ. per 10′	log VIII	differ. per 10′	L
36°	3.1947841.4		5.3163447.2		7.68373.9		0.07104.0		0.07458.2		36°
37	7597.1	40.7	2958.8	81.4	837.5	77.3	483.9	63.3	838.2	63.3	37
38	7350.4	41.1	2465.4	82.2	69243.7	67.7	913.9	71.6	.08268.2	71.7	38
39	7101.5	41.5	1967.6	82.9	593.7	58.3	.08391.9	79.7	747.2	79.8	39
40	6850.8	41.8	1466.2	83.5	888.5	49.1	916.9	83.7	.09269.2	87.0	40
41	6598.3	42.1	0961.2	84.2	70128.6	40.0	.09487.9	95.7	837.1	94.5	41
42	6344.7	42.3	0454.2	84.2	314.7	31.0	.10101.8	102.3	.10448.1	101.8	42
43	6090.1	42.4	3159945.0	84.9	447.4	22.0	759.9	109.7	.11101.1	108.6	43
44	5834.8	42.5	9434.4	85.1	526.8	13.2	.11458.9	116.5	796.1	111.3	44
45	5579.3	42.6	8923.4	85.2	553.3	2.7	.12199.0	123.3	.12530.1	125.2	45
46	5323.6	42.6	8412.0	85.2	526.8	2.7	.13004.2	134.2	.13305.1	129.2	46
47	5068.4	42.5	7901.4	85.1	447.4	13.2	846.9	140.4	.14119.1	135.7	47

OSSERVAZIONE: I logaritmi delle quantità IV, VI, VII, IX, X, XI sono eguali a quelli calcolati con i dati dell'ellissoide di Bessel (vedi Tav. II).

TAVOLA IV.

CORREZIONI D'AZIMUT.

VALORI DI $\delta z_u \times 10^7$.

Z \ $\delta z''$	0″	10″	20″	30″	40″	50″	60″	$\delta z''$ / Z
0°	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0°
5	»	18.4	36.8	55.3	73.7	92.1	110.5	5
10	»	37.1	74.2	111.3	148.4	185.6	222.7	10
15	»	56.4	112.8	169.2	225.6	282.0	338.4	15
20	»	76.6	153.2	229.9	306.5	383.2	459.8	20
25	»	98.2	196.4	294.5	392.7	490.9	589.0	25
30	»	121.6	243.1	364.7	486.2	607.8	729.0	30
35	»	147.4	294.8	442.3	589.6	737.1	884.5	35
40	»	176.7	353.3	530.0	706.6	883.3	1060.0	40
45	»	210.6	421.1	631.6	842.2	1052.7	1263.3	45
50	»	250.9	501.8	752.7	1003.6	1254.6	1505.5	50
55	»	300.7	601.4	902.0	1202.7	1503.4	1804.1	55
60	»	364.7	729.4	1094.0	1458.7	1823.4	2188.0	60
65	»	451.5	903.0	1354.5	1806.0	2257.5	2709.1	65
70	»	578.5	1156.9	1735.4	2313.9	2892.4	3470.8	70
75	»	785.7	1571.5	2357.3	3143.1	3928.9	4714.6	75
80	»	1194.1	2388.2	3582.2	4776.3	5970.4	7164.4	80
85	»	2406.6	4813.1	7219.8	9626.3	12032.9	14439.5	85
90	»	∞	∞	∞	∞	∞	∞	90

Tavola V.

VALORI DELLE CORREZIONI LOGARITMICHE DEI LOGARITMI DEI MONOMI MESSI IN EVIDENZA NELLE FORMULE DI DELAMBRE.

L	$C_a \cdot 10^7$	$C_b \cdot 10^4$	$C_c \cdot 10^3$	$C_d \cdot 10^6$	$C_e \cdot 10^4$	$C_f \cdot 10^2$	$C_g \cdot 10^2$	$C'_a \cdot 10^7$	$C'_b \cdot 10^6$	$C'_c \cdot 10^4$	$C'_d \cdot 10^4$	$C'_e \cdot 10^2$	$C'_f \cdot 10^2$	L
36°	— 573.5	+ 30.3	+ 3.0	— 128.4	— 2.2	0.0	0.0	— 711.0	— 142.2	— 2.1	— 2.1	0.0	0.0	36°
37	— 577.9	»	»	— 129.1	— 2.2	»	»	— 712.8	— 142.5	— 2.1	— 2.1	»	»	37
38	— 583.0	»	»	— 129.8	— 2.2	»	»	— 714.5	— 142.9	— 2.1	— 2.1	»	»	38
39	— 588.4	»	»	— 130.5	— 2.2	»	»	— 716.3	— 143.3	— 2.1	— 2.2	»	»	39
40	— 593.8	»	»	— 131.2	— 2.2	»	»	— 718.1	— 143.6	— 2.1	— 2.2	»	»	40
41	— 599.5	»	»	— 132.0	— 2.3	»	»	— 720.0	— 144.0	— 2.2	— 2.2	»	»	41
42	— 604.9	»	»	— 132.7	— 2.3	»	»	— 721.8	— 144.4	— 2.2	— 2.2	»	»	42
43	— 610.3	»	»	— 133.6	— 2.3	»	»	— 723.6	— 144.7	— 2.2	— 2.2	»	»	43
44	— 616.0	»	»	— 134.2	— 2.3	»	»	— 725.5	— 145.1	— 2.2	— 2.2	»	»	44
45	— 621.4	»	»	— 134.9	— 2.3	»	»	— 727.3	— 145.5	— 2.2	— 2.2	»	»	45
46	— 627.1	»	»	— 135.6	— 2.3	»	»	— 729.2	— 145.8	— 2.2	— 2.2	»	»	46
47	— 632.5	»	»	— 136.4	— 2.3	»	»	— 731.0	— 146.2	— 2.2	— 2.2	»	»	47