

SULL' IMPIEGO DEI VALORI BESSELLIANI

per il Calcolo delle Lunghezze dei Raggi Principali di Curvatura sull' Ellissoide Internazionale di Hayford.

Il signor A. Letroye, Capo dell' Ufficio di Calcoli dell' Istituto Cartografico Militare del Belgio, ha recentemente esposto nel « Bulletin Géodésique » organo de « L'Association de Géodésie de l' Union Géodésique et Géophysique Internationale » alcune considerazioni circa la utilizzazione delle nuove Tavole dell'ellissoide di riferimento internazionale per calcoli relativi ad un ellissoide qualunque.

L' illustre Autore ricordato che l' U. G. G. I. ha fino dalla sua riunione di Madrid (1924) consigliato l' impiego nei lavori geodetici dello ellissoide calcolato da Hayford nel 1909 i cui parametri sono :

$$a_{II} = 6\,378\,388 \text{ m. (semi asse equatoriale)}$$

$$e_{II}^2 = 0,006\,722\,670 \text{ (quadrato della eccentricità)}$$

rammenta che le Tavole accennate, calcolate e pubblicate a cura del Segretariato della Associazione di Geodesia della U. G. G. I. contengono – nei sistemi di divisione della circonferenza centesimale e sessagesimale – i logaritmi decimali delle quantità :

$$(1) \quad 1 : W^2, \quad V^2, \quad N, \quad \rho, \quad \sqrt{\rho \cdot N}, \quad \frac{1}{2 \rho N \cdot \text{arc } 1''}$$

dove :

$$(2) \quad W^2 = 1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi, \quad V^2 = \frac{W^2}{1 - e^2}, \quad N = \frac{A}{W}, \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{W^3},$$

oltre alle lunghezze degli archi di parallelo di minuto in minuto e quelle degli archi di meridiano dall'equatore alla latitudine generica φ .

Premesso ciò egli si propone di determinare le correzioni che si devono attribuire ai logaritmi delle quantità (1) per dedurre i vari parametri con riferimento ad un ellissoide qualunque facendo uso delle Tavole accennate e stabilisce i contributi relativi alle sole due espressioni $1 : W^2, N$ esponendo pure un esempio numerico per il calcolo della $1 : W^2$ sull'ellissoide di Bessel per la latitudine di 16°.

Abbiamo ritenuto non inutile – data l'importanza del problema – di completare la ricerca di Letroye ricavando i contributi che si devono aggiungere ai logaritmi decimali di tutte le espressioni (1), che trovano come è noto larga applicazione in parecchie questioni geodetiche relative alle triangolazioni, dimostrando nel contempo come esse sono formate da due contributi : uno costante ed uno



variabile con la latitudine e di facile conteggio. Da ultimo, supposto di avere a disposizione una Tavola calcolata con i dati dell'ellissoide di Bessel:

$$a_B = 6\,377\,397,16 \text{ m.}$$

$$e_B^2 = 0,006\,674\,372$$

ci siamo occupati di calcolare gli importi dei contributi costanti di cui ora si è fatto cenno e di quelli variabili con la latitudine, per l'intervallo 36^0 – 47^0 fra cui è compresa l'Italia, raccogliendo, questi ultimi, di grado in grado, in una Tavola in modo da facilitare il calcolo per il passaggio dai dati forniti dalle Tavole per l'ellissoide di Bessel a quelli corrispondenti per l'ellissoide internazionale di Hayford.

Indicando con δa e δe^2 le variazioni che subiscono il raggio equatoriale ed il quadrato della eccentricità nel passaggio da un ellissoide ad un altro si ha facilmente dalla prima delle (2):

$$(3) \quad \delta W^2 = -\operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \delta e^2, \quad \delta W = -\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2W} \delta e^2$$

e conseguentemente, indicando con $l n$ il logaritmo neperiano:

$$\delta (l n \frac{1}{W^2}) = -\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{W^2} \delta e^2$$

moltiplicando ambo i membri per $\mu = 0,4342945$, modulo dei logaritmi decimali (che indicheremo con la sigla *log*), si ottiene la prima formula stabilita – con altro procedimento – da Letroye:

$$(4) \quad \delta (\log \frac{1}{W^2}) = \mu \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{W^2} \delta e^2$$

Analogamente, passando ai $l n$ l'espressione che fornisce V^2 , variando e moltiplicando tutti i termini per μ , dopo aver tenuto conto della prima delle (3), si perviene alla:

$$(5) \quad \delta (\log V^2) = -\mu \frac{1}{1-e^2} \delta e^2 - \mu \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{W^2} \delta e^2$$

Per la gran normale N si ha similmente:

$$l n N = l n a - l n W$$

e variando:

$$\delta (l n N) = \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta W}{W}$$

e per la seconda delle (3):

$$\delta (l n N) = \frac{\delta a}{a} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2W^2} \delta e^2$$



e da ultimo :

$$(6) \quad \partial (\log N) = \mu \frac{\partial a}{a} + \mu \frac{\sin^2 \varphi}{2 W^2} \cdot \partial e^2$$

che è la seconda formula stabilita da Letroye.

Per il raggio di curvatura del meridiano si ha facilmente :

$$(7) \quad \partial (\log \rho) = \mu \frac{\partial a}{a} - \mu \frac{1}{1-e^2} \cdot \partial e^2 + 3 \mu \frac{\sin^2 \varphi}{2 W^2} \partial e^2$$

L'espressione del raggio della sfera locale, tenuto conto delle (6) e (7) fornisce prima la :

$$\rho (l n \sqrt{\rho \cdot N}) = \frac{1}{2} \cdot \rho (l n \rho) + \frac{1}{2} \cdot \partial (l n N)$$

e conseguentemente :

$$(8) \quad \partial (\log \sqrt{\rho \cdot N}) = \mu \frac{\partial a}{a} - \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \frac{1}{1-e^2} \cdot \partial e^2 + 2 \mu \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2 W^2} \cdot \partial e^2$$

Senza difficoltà poi si perviene da ultimo alla :

$$(9) \quad \partial \left(\log \frac{1}{2 \rho N \cdot \arccos r''} \right) = -2 \mu \frac{\partial a}{a} + \mu \cdot \frac{1}{1-e^2} \cdot \partial e^2 - 4 \mu \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2 W^2} \cdot \partial e^2$$

Le formule (4), (5), (6), (7), (8), (9) sono del tipo :

$$(4') \quad \partial \left(\log \frac{1}{W^2} \right) = 2 \cdot F(\varphi)$$

$$(5') \quad \partial (\log V^2) = -A - 2 \cdot F(\varphi)$$

$$(6') \quad \partial (\log N) = B + F(\varphi)$$

$$(7') \quad \partial (\log \rho) = C + 3 \cdot F(\varphi)$$

$$(8') \quad \partial (\log \sqrt{\rho N}) = D + 2 \cdot F(\varphi)$$

$$(9') \quad \log \left(\frac{1}{2 \rho N \cdot \arccos r''} \right) = E - 4 \cdot F(\varphi)$$

con $A, B, \dots, E$ costanti definite dalle :

$$(10) \quad \begin{aligned} A &= C' & C &= -C' + C'' & E &= C' - 2 C'' \\ B &= C'' & D &= -\frac{1}{2} C' + C'' \end{aligned}$$

dove :

$$(11) \quad C' = \frac{\mu}{1-e^2} \cdot \partial e^2 \quad C'' = \frac{\mu}{a} \cdot \partial a$$



e:

$$(12) \quad F(\varphi) = \mu \cdot \frac{\text{sen}^2 \varphi}{2 W^2} \cdot \delta e^2$$

Per il calcolo numerico notiamo che si ha:

$$\begin{aligned} \delta a &= a_H - a_B = + 990,84 \text{ m.} \\ \delta e^2 &= e^2_H - e^2_B = + 0,000 \, 048 \, 297 \end{aligned}$$

ed in base a ciò:

$$\begin{array}{llll} (11') & C' = + 221,1 & C'' = + 674,7 & \\ (10') & A = + 211,1 & C = + 463,6 & E = - 1138,3 \\ & B = + 674,7 & D = + 569,2 & \end{array}$$

in unità della settima cifra decimale logaritmica.

Nella Tabella che segue sono trascritti per l'ellissoide di Bessel i logaritmi decimali delle quantità $N, \rho, \sqrt{\rho N}, \frac{1}{2 \rho N \cdot \text{arc } 1''}$ e quelli della correzione $F(\varphi)$ definita dalla (12) per il passaggio all'ellissoide di Hayford (espressa in unità della settima cifra decimale logaritmica), il tutto, in funzione della latitudine variante di grado in grado da 36° a 47° .

φ	$\log N$	$\log \rho$	$\log \sqrt{\rho N}$	$\log \frac{1}{2 \rho N \cdot \text{arc } 1''}$	$F(\varphi)$	Δ
36°	6,8051448	6,8032390	6,8041919	1,40501 - 10	36,3	1,8
37	1690	3118	2404	40491	38,1	1,7
38	1935	3852	2898	82	39,8	1,8
39	2182	4594	3388	72	41,6	1,8
40	2431	5341	3886	62	43,4	1,9
41	2682	6092	4387	52	45,3	1,8
42	2933	6848	4890	42	47,1	1,8
43	3186	7606	5396	32	48,9	1,9
44	3440	8366	5903	21	50,8	1,8
45	3693	9127	6410	11	52,6	1,9
46	3947	9889	6918	01	54,5	1,8
47	4201	8040649	7425	1,40391 - 10	56,3	



ESEMPIO PRATICO: Calcolare con l'ellissoide di Hayford i logaritmi decimali delle quantità N , ρ , $\sqrt{\rho N}$, $\frac{1}{2 \rho N \cdot \text{arc } 1''}$ alla latitudine di 45° facendo uso della Tabella di cui sopra.

In base alle formule (6'), (7'), (8') e (9') il calcolo può essere effettuato secondo lo schema:

Qualità ($Q =$)	N	ρ	$\sqrt{\rho N}$	$\frac{1}{2 \rho N \cdot \text{arc } 1''}$
log Q , ellissoide Bessel ..	6,8053693	6,8039127	6,8046410	1,40411 - 10
correzioni {	costante	+ 675	+ 464	+ 569
	variabile	+ 53	+ 158	+ 105
log Q , ellissoide Hayford .	6,8054421	6,8039749	6,8047084	1,40398 - 10

Si ha così un modo semplice e rapido per il calcolo dei raggi principali di curvatura ecc., riferiti all'ellissoide hayfordiano. Un altro problema, importante dal punto di vista geodetico, è quello relativo alla determinazione delle variazioni delle coordinate in relazione alle variazioni delle costanti ellissoidiche, ma su ciò ritorneremo prossimamente.

Prof. GIOVANNI BOAGA
della R. Università di Pisa.

