DETERMINAZIONE DI DISTANZE ORIZZONTALI PER MEZZO DEL BAROMETRO E DI ANGOLI ZENITALI

La determinazione di distanze orizzontali per mezzo del barometro e di angoli zenitali è un problema, se vogliamo un po' curioso, di cui non si trova cenno nei moderni trattati di topografia e geodesia, mentre un breve ricordo è contenuto nel « *Traité de Géodésie* » di L. Puissant, pubblicato a Parigi nel 1805.

Riteniamo questo problema di una certa importanza, non solo per gli esploratori ed i geografi che desiderano avere una triangolazione approssimata di regioni montuose (sulla quale poter appoggiare rilevamenti topografici speditivi) e ciò senza dover misurare basi ed angoli orizzontali, ma anche per gli ingegneri che devono progettare strade e canali in regioni coloniali, ricche di monti, prive di carte topografiche, e, perchè no ? anche di talune questioni di carattere militare.

È ovvio che la risoluzione del problema poggia sullo accoppiamento delle formule che danno la differenza di livello Δ fra due punti A e B di quota Q_A e Q_B ottenuta per mezzo :

a) della *livellazione trigonometrica* col metodo delle distanze zenitali reciproche z_A, z_B :

$$(1) \qquad \Delta = D\left(1 + \frac{Q_A + Q_B}{2\rho}\right) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$

con D distanza orizzontale fra i due punti A e B e ρ raggio della sfera locale alla latitudine media dei due punti A e B

b) della *livellazione barometrica* mediante la nota formula (completa) di Laplace :

$$(2) \qquad \Delta = C\,(1 + \beta \cos 2\varphi_m)\left(1 + \frac{Q_A + Q_B}{\rho}\right)(1 + \alpha t_m)\left(1 + \varepsilon \frac{p_v}{p_m}\right) \log \frac{p_A}{p_B}$$

con :

$$C = 18400, \quad \beta = 0{,}00265, \quad \alpha = 0{,}003665, \quad \varepsilon = 0{,}377$$

coefficienti costanti,

φ_m, latitudine media fra le latitudini dei punti A e B,

p_v, media delle tensioni del vapore acqueo che si osservano nei punti A e B,

p_m, pressione media fra le pressioni p_A e p_B osservate in A e B

La formula che risolve la questione è dunque la seguente :

$$(3) \qquad D = \Delta\left(1 - \frac{Q_A}{\rho} - \frac{\Delta}{2\rho}\right) \cot \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$

che si ricava dalla (1) introducendo per Δ il valore che si deduce dalla (2). Però, per $Q_A = 2000$ m., $\Delta = 2000$ m. e $\rho = 6\,000\,000$ m. si ottiene :

$$1 - \frac{Q_A}{\rho} - \frac{\Delta}{2\rho} = 0{,}9995$$

sicchè per rilievi approssimati questo termine può essere abbandonato; così pure possono essere abbandonati alcuni fattori messi in evidenza nella (2), il che val quanto dire calcolare Δ, anzichè con la formula completa di Laplace, con formule approssimate, come quelle per esempio, di Babinet, di Hersgell, ecc.

Praticamente dunque converrà generalmente adoperare la formula:

$$(4) \qquad D = \Delta \cot \frac{1}{2} (z_B - z_A)$$

Fa eccezione il caso in cui risultano eguali le due distanze zenitali.

Operando così di cima in cima, tenendo come punti di riferimento A, punti meno o più elevati dei punti B, si potrà avere in breve una abbastanza buona triangolazione per gli scopi accennati e che potrà, volendo, essere assoggettata ad una compensazione [1].

Circa la *precisione* conseguibile con questo procedimento, notiamo che, se si adoperano nelle stazioni A e B strumenti dello stesso tipo e della stessa approssimazione nel cerchio verticale, si ha *eguaglianza degli errori relativi di* D *e di* Δ.

Difatti, variando la (4) e ritenendo, per quanto detto $\delta z_A = \delta z_B$ si ricava:

$$\delta D = \delta \Delta \cot \frac{1}{2} (z_B - z_A) = \delta \Delta \cdot \frac{D}{\Delta}$$

ossia:

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta \Delta}{\Delta}$$

che dimostra l'asserto.

Come è noto l'errore relativo $\frac{\delta \Delta}{\Delta}$ si può ritenere inferiore a 4 ‰ e quindi si può calcolare la distanza orizzontale D con sufficiente approssimazione.

Il prof. Cicconetti nel suo « *Trattato di Geodesia e Topografia* » (Casa Editrice Vallardi, Milano 1938-XVI) alla pag. 584 riporta al completo il calcolo della livellazione barometrica applicando la (2), con osservazioni eseguite a Udine ed a Subit il 17 febbraio 1901 alle ore 8 e 30, in occasione delle ricerche sul coefficiente di rifrazione terrestre.

Il risultato di questo calcolo è:

$$\Delta = 609{,}94 \text{ m.}$$ [2]

Nella Memoria del prof. Cicconetti e Pierpaoli « *Il coefficiente di rifrazione terrestre a Udine* » (R. Accademia dei Lincei, 1902), sono riportate le distanze zenitali reciproche eseguite a Udine ed a Subit il 17 febbraio 1901 alle ore 8 e 30; esse sono:

$$z_A = 88^\circ\, 09'\, 54'', 77$$
$$z_B = 91^\circ\, 57'\, 32'', 96$$

ed eseguendo il calcolo con la (4) si trae:

$$D = 18416 \text{ m.}$$

mentre da una triangolazione ordinaria eseguita dallo stesso prof. Cicconetti risulta:

$$D = (18413{,}63 \pm 0{,}134) \text{ m.}$$ [3].

È ovvio che il procedimento indicato si può estendere con facilità al caso in cui si misura una sola distanza zenitale.

Rammentiamo che le ore più convenienti per eseguire una buona differenza

(1) Cnfr. « *Schemi di compensazioni di rilievi topografici eseguiti con sole misure lineari* ». Rivista del Catasto e dei S.S. T.T. Anno 1935. XIII, n. 4.

(2) Il dislivello ottenuto con una livellazione geometrica è 610,88 m.

(3) Cnfr. Memoria accennata a pag. 13.

Ora	UDINE Temperatura	UDINE Pressione	UDINE Tensione vapore acqueo	UDINE Distanze zenitali	SUBIT Temperatura	SUBIT Pressione	SUBIT Tensione vapore acqueo	SUBIT Distanze zenitali	Differenze di livello Δ	Scostamenti	Distanze orizzontali D	Scostamenti
	°	mm	mm			mm	mm		m	m	m	m
8	—°2,9	749,65	3,58	88°09′48″,80	—4°,3	693,88	2,31	91°57′35″,38	612,23	+ 1,35	18 474	+ 61
8,30	— 2,5	97	3,45	57 , 86	— 4,7	694,28	2,04	34 , 50	611,89	+ 1,01	18 477	+ 64
9	— 0,5	96	4,38	59 , 15	— 4,3	54	2,31	38 , 89	610,32	— 0,56	18 425	+ 12
9,30	+ 0,1	750,10	4,40	10 06 , 40	— 3,4	81	2,45	37 , 38	610,57	— 0,31	18 445	+ 32
10	+ 0,6	749,94	4,05	10 , 65	— 3,9	82	2,66	37 , 48	608,73	— 2,15	18 395	— 18
10,30	+ 1,0	78	3,70	09 15 , 05	— 3,9	59	2,32	43 , 71	610,31	— 0,57	18 360	— 53
11	+ 1,2	69	3,01	20 , 95	— 5,9	24	2,76	39 , 31	610,93	+ 0,05	18 476	+ 63
11,30	+ 2,0	41	3,14	17 , 88	— 3,3	693,99	3,10	43 , 18	614,74	+ 3,86	18 497	+ 84
12	+ 1,8	13	3,28	19 , 45	— 2,9	93	2,43	45 , 93	612,64	+ 1,76	18 432	+ 19
14,30	+ 6,1	747,78	2,06	10 19 , 93	+ 1,4	75	3,76	49 , 76	609,77	— 1,11	18 422	+ 9
15	+ 6,3	84	2,07	20 , 03	+ 1,6	63	3,58	47 , 78	612,22	+ 1,34	18 499	+ 86
15,30	+ 5,6	80	2,10	17 , 03	+ 1,4	56	3,69	45 , 84	611,63	+ 0,75	18 437	+ 24
16	+ 4,9	74	2,25	12 , 72	+ 1,0	39	3,14	46 , 61	611,89	+ 1,01	18 438	+ 25
16,30	+ 4,6	43	2,33	11 , 43	+ 1,2	25	3,41	42 , 13	610,01	— 0,87	18 428	+ 15
17	+ 3,9	44	2,34	08 , 72	+ 0,4	01	3,62	42 , 26	611,23	+ 0,35	18 419	+ 6
17,30	+ 3,4	45	2,48	06 , 70	— 0,1	06	2,64	41 , 36	609,72	— 1,16	18 371	— 32

di livello applicando la formula barometrica, sono quelle del sorgere e del tramontare del Sole. Effettuando le osservazioni in ore calde si ottengono generalmente dislivelli maggiori di quelli veri; risultati opposti si ottengono effettuando le misure in ore fredde (Regola di Bauernfeind). Tuttavia, per lavori approssimati, si possono eseguire le osservazioni in tutte le ore del giorno; le differenze che si riscontrano nel calcolo delle distanze orizzontali non sono molto sensibili.

Per mettere in evidenza questo fatto siamo nuovamente ricorsi alla citata Memoria del prof. Cicconetti dove sono raccolte per le stazioni di Subit e Udine oltre alle distanze zenitali reciproche, serie complete di osservazioni contemporanee di pressione, di temperatura e di umidità.

Con i dati riferentisi di mezz'ora in mezz'ora dalle ore 8 alle ore 12 del giorno 18 febbraio e dalle ore 14 e 30 alle ore 17 e 30 del 24 febbraio e riportati nella Tabella numerica annessa, abbiamo calcolato in base alla (4) le distanze orizzontali trascritte nella penultima colonna. Nella Tabella sono pure riportate le differenze di livello calcolate dal prof. Cicconetti con la formula del Siacci (1). Gli *scostamenti* indicati rappresentano le differenze fra i valori calcolati delle differenze di livello e delle distanze orizzontali ed i valori, rispettivamente, 610,88 m. e 18 413 metri ottenuti, come è stato ricordato, con procedimenti della geodesia classica.

Gli scostamenti medi per la differenza di livello e per la distanza orizzontale risultano degli importi $+ 0{,}46$ m. e $+ 25$ m., ossia approssimativamente entrambi dell' 1 ‰ (2).

Notiamo da ultimo che nella costruzione cartografica non è possibile evitare errori più piccoli della quinta parte del millimetro (spessore della punta scrivente) e quindi riproducendo una figura in scala 1/m. si dovrà necessariamente trascurare quantità inferiori a m/5 millimetri. Nella scala 1 : 100 000 si ottiene un importo di 20 metri. Con questa osservazione e col risultato medio dianzi ottenuto per la distanza orizzontale fra Udine e Subit, si può ritenere che il procedimento indicato può benissimo servire anche per misurare basi topografiche, e comunque lati molto lunghi di triangolazioni sulle quali poggiare le operazioni di restituzioni, in scale con grandi denominatori, di prese aerofotogrammetriche.

Dal punto di vista operativo riuscirebbero interessanti opportune esperienze in merito.

PROF. GIOVANNI BOAGA.

(1) Per notizie su questa formula consultare l' interessante studio di SIACCI F., « *Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni aerostatiche di J. Glaisher e sopra una nuova formula barometrica* ». « Atti della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli ». Vol. VII, serie II, n] 11.

(2) L'angolo geocentrico di 1'' corrisponde a circa 30 metri di geodetica; si può affermare dunque che l' incertezza del valore dell'angolo di convergenza fra le verticali ellissoidiche delle due stazioni considerate e distanti 18 km. non è superiore a un secondo sessagesimale se viene calcolato col procedimento esposto.